АЛГЕБРА

Учебное пособие для 9 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

Под редакцией профессора
Л. Б. Шнепермана

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь

4-е издание, исправленное и дополненное

Минск «Народная асвета» 2014

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.14я721
А45

А в т о р ы:

Е. П. Кузнецова, Г. Л. Муравьева, Л. Б. Шнеперман, Б. Ю. Ящин

Р е ц е н з е н т

кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой высшей математики учреждения образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет»
А. А. Тиунчик

Алгебра : учеб. пособие для 9-го кл. учреждений общ.
А45 сред. образования с рус. яз. обучения / Е. П. Кузнецова [и др.] ; под ред. проф. Л. Б. Шнепермана. — 4-е изд., испр. и доп. — Минск : Народная асвета, 2014. — 287 с. : ил.
ISBN 978-985-03-2201-2.
Предыдущее издание вышло в 2008 г.

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.14я721

ISBN 978-985-03-2201-2

ОТ АВТОРОВ

В 9-м классе мы продолжим изучение алгебры: более глубоко изучим понятие функции, научимся решать квадратные неравенства и системы уравнений с двумя переменными, познакомимся с арифметической и геометрической прогрессиями.

Упражнения в этом учебном пособии нумеруются по главам. Число перед точкой обозначает номер главы, число после точки — номер упражнения в этой главе. Например, 3.14 — это 14-е упражнение из 3-й главы. Аналогично нумеруются и пункты теории. Пункт 2.4 обозначает 4-й пункт из 2-й главы.

Как и в учебных пособиях «Алгебра, 7» и «Алгебра, 8», упражнения разделены на три группы. Упражнения, обозначенные номерами с кружочками, например 1.12°, должен уметь решать каждый учащийся. Все остальные задания предназначены для тех, кто желает углубить свои знания. Наиболее трудные задания отмечены номерами со звездочками, например 1.58*.

Теоретический материал, который выделен треугольниками ▲, предназначен тем, кто интересуется математикой и собирается изучать ее дальше.

Некоторые важные моменты в изложении теории отмечены на полях восклицательным знаком .

Весы  нарисованы там, где есть возможность сравнивать разные варианты решения или доказательства.

Исторические сведения, которые встречаются в книге, отмечены знаком .

Квадрат с диагоналями ☒ обозначает конец доказательства утверждения, теоремы.

Пояснения к преобразованиям размещаются между двумя вертикальными стрелками ↑ ... ↑ или ↓ ... ↓; направление стрелок показывает, какое именно преобразование поясняется.

Материал на повторение отмечен специальным символом .

После каждого пункта теории помещены вопросы под знаком .

Глава 1
Функции

1.1. Функция

Мы продолжим изучение понятия функции, начатое в 7-м и 8-м классах. Рассмотрим сначала два примера.

Пример 1. Напомним известную геометрическую формулу. Пусть a — длина ребра куба, V — объем этого куба. Тогда

$$V = a^3.$$

Здесь множество значений, которые может принимать переменная a (обозначим его D), — это все положительные числа, т. е. $D = (0; +\infty)$.

Формула $V = a^3$ выражает зависимость между переменными a и V. В ней указан закон, по которому каждому значению a из промежутка $(0; +\infty)$ ставится в соответствие одно определенное число V.

Пример 2. Сумма четвертой степени натурального числа x и натурального числа y равна 1100. Как найти число y, зная число x?

Решение. Из условия понятно, что $x^4 + y = 1100$, т. е.

$$y = 1100 - x^4.$$

Область определения выражения, стоящего в правой части этой формулы, — множество $D = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ (объясните почему). Формулой $y = 1100 - x^4$ указан закон, по которому каждому значению x из множества D ставится в соответствие одно определенное число y.

В каждом из рассмотренных примеров указан закон, по которому каждому числу из некоторого множества D ставится в соответствие одно определенное число. В таких случаях говорят, что *на множестве D определена функция*.

Определение. Закон (правило), по которому каждому значению x из некоторого множества чисел D ставится в соответствие одно определенное число y, называется *функцией, определенной на этом множестве D*.

При этом x называют ***независимой переменной*** или ***аргументом***, y — ***зависимой переменной*** или ***функцией от*** x, а множество D — ***областью определения функции***.

Разумеется, вместо букв x, y, D можно было употребить и другие буквы.

Линейная функция $y = kx + b$ и квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ удовлетворяют данному определению.

Слово «функция» происходит от латинского *functio*, что означает «совершение», «выполнение».
В математике термин «функция от x» первыми стали употреблять ученые Готфрид Лейбниц (1646—1716) и Иоганн Бернулли (1667—1748).

Пример 3. Дана функция $y = \frac{3-x}{x}$ с областью определения $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Найти значения этой функции при x, равном -5; -4; -3; -2; -1.

Решение. Пусть $x_1 = -5$; $x_2 = -4$; $x_3 = -3$; $x_4 = -2$; $x_5 = -1$. Соответствующие значения функции y обозначим y_1, y_2, y_3, y_4, y_5. Тогда

$$y_1 = \frac{3-(-5)}{-5} = \frac{8}{-5} = -1\frac{3}{5}; \qquad y_2 = \frac{3+4}{-4} = \frac{7}{-4} = -1\frac{3}{4};$$

$$y_3 = \frac{3+3}{-3} = -2; \qquad y_4 = \frac{3+2}{-2} = -2{,}5; \qquad y_5 = \frac{3+1}{-1} = -4.$$

Ответ: $-1\frac{3}{5}$; $-1\frac{3}{4}$; -2; $-2{,}5$; -4.

Заметим, что соответствующие значения аргумента x и функции y обычно обозначают x_1 и y_1 (x_2 и y_2, x_3 и y_3 и т. д.). Аналогичные записи употребляются и тогда, когда аргумент и функция выражены другими буквами.

Определение. Множество всех значений, которые может принимать функция, называется *множеством* (*областью*) *значений функции*.

Определение. Наименьшее число из множества значений функции называется *наименьшим значением функции*, а наибольшее число из этого множества — *наибольшим значением функции*.

Вернемся к примеру 1. Может ли значение функции $V = a^3$ быть равным 8? Понятно, что может, поскольку при

$a = 2$ значение $V = 2^3$, т. е. $V = 8$. А может ли значение функции V быть равным 9? Ответить на этот вопрос можно, решив уравнение $a^3 = 9$.

При $a = \sqrt[3]{9}$ получим $a^3 = (\sqrt[3]{9})^3 = 9$. Значит, V может принимать значение 9.

Покажем теперь, что для любого $c > 0$ найдется такое значение a, что $c = a^3$. Действительно, если $a = \sqrt[3]{c}$, то $a^3 = (\sqrt[3]{c})^3 = c$.

Таким образом, множество значений функции $V = a^3$ с областью определения $(0; +\infty)$ — это промежуток $(0; +\infty)$. Наибольшего и наименьшего значений эта функция не имеет.

Область определения функции $y = 1100 - x^4$ из примера 2 состоит из чисел $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$. Найдем соответствующие значения функции y, которые и будут составлять множество ее значений: $y_1 = 1100 - 1^4 = 1099$, $y_2 = 1100 - 2^4 = 1084$, аналогично получим $y_3 = 1019$, $y_4 = 844$, $y_5 = 475$.

Значит, множество значений функции y — это множество $\{1099; 1084; 1019; 844; 475\}$. Очевидно, что 1099 — наибольшее, а 475 — наименьшее значения функции.

▲ Покажем теперь, как найти множество значений функции из примера 3.

Пусть c — значение функции $y = \frac{3 - x}{x}$. Это значит, что при каком-то значении x имеет место равенство

$$c = \frac{3 - x}{x}. \qquad (*)$$

Множество значений функции $y = \frac{3 - x}{x}$ состоит из тех значений c, при которых уравнение (*) имеет решение. Решим его:

$$cx = 3 - x;$$
$$(c + 1)x = 3.$$

Если $c = -1$, уравнение решений не имеет; если $c \neq -1$, то $x = \frac{3}{c + 1}$.

Таким образом, уравнение (*) имеет решение при любом $c \neq -1$, т. е. множество значений функции $y = \frac{3 - x}{x}$ — это множество $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. Для этой функции невозможно указать ни наибольшего, ни наименьшего значений. ▲

Множество значений функции часто обозначают буквой E. Так, в примере 3 можно записать: $E = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

?

1. Сформулируйте определение функции.
2. Назовите независимую и зависимую переменные для каждой из функций в примерах 1—3.
3. Назовите область определения и множество значений для каждой из функций в примерах 1, 2.
4. Назовите какие-нибудь пары соответствующих значений аргумента и функции в каждом из примеров 1—3.
5. Что называется множеством значений функции?
6. Что называется наименьшим значением функции?
7. Что называется наибольшим значением функции?

Упражнения

1.1°. Может ли значением функции $y = x^3 - 7$ быть число:

1) -27; 2) 34; 3) 132; 4) -64?

1.2°. Дана функция $y = \frac{x+4}{x-4}$ с областью определения $D = (-\infty; 4)$. Найдите (если возможно) значения функции y при x, равном:

1) -3; $-\frac{2}{5}$; 0; $\frac{2}{5}$; 1; 3; 4;

2) -4; -1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 2; $3{,}9$; 4.

1.3°. Найдите значение функции $y = (x - 2)x$ с областью определения $D = \boldsymbol{N}$ при:

1) $x = 4$; 2) $x = 3$.

1.4°. Найдите значение функции $y = x(5 - x)$ с областью определения $D = \boldsymbol{Z}$ при:

1) $x = -5$; 2) $x = -1$.

1.5°. Дана функция $y = -2x + 3$ с областью определения $D = \boldsymbol{R}$. Найдите множество значений функции и сравните значения этой функции при:

1) $x = 5$ и $x = 4$; 2) $x = -3$ и $x = 1$;

3) $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{2}$; 4) $x = -\frac{3}{4}$ и $x = \frac{3}{4}$.

1.6. Дана функция $y = 4x - 1$ с областью определения $D = [-10; 10]$. Найдите множество значений функции и сравните значения этой функции при:

1) $x = -4$ и $x = -7$; 2) $x = 5$ и $x = 6$;

3) $x = -6$ и $x = 9$; 4) $x = -6$ и $x = -5$.

1.7. Дана функция $y = x^2$ с областью определения $D = [-5; 5]$. Найдите (если возможно) значения функции при x, равном:

1) -3; 2) 4; 3) 2; 4) -6; 5) 7; 6) -5.

1.8. Дана функция $y = \frac{1}{x+1}$ с областью определения $D = (-1; +\infty)$. Сравните значения функции при x, равном:

1) $-\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{4}$; 2) $-\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$ и 3; 4) $\frac{1}{4}$ и 4.

1.9°. При каком значении x равны значения функций, заданных формулами:

1) $y = 0,7x + 14$ и $y = 0,2x - 1$;
2) $y = -0,5x + 2,5$ и $y = -4,2x - 0,7$;
3) $y = 1,6 - 0,8x$ и $y = 2,4x + 1,2$;
4) $y = 5,5 + 1,3x$ и $y = 3,6 - 1,7x$?

1.10°. При каких значениях аргумента (если они есть) значения функции $y = 2x^2$ совпадают со значениями функции:

1) $y = 25$; 2) $y = 1020$; 3) $y = -16$;
4) $y = -2870$; 5) $y = 0$; 6) $y = 2460$?

1.11. Для функции $y = x^2$ определите, при каких значениях x значения функции:

1) меньше 9; 2) больше 4;
3) больше 0; 4) меньше 16.

1.12°. Может ли функция $y = x^2$ иметь значение:

1) $y = 63,7$; 2) $y = 29,1$; 3) $y = -5,2$;
4) $y = -8$; 5) $y = 0$; 6) $y = -0,0001$?

1.13. При каких значениях a квадратичная функция $y = (a + 3)x^2$ имеет:

1) наибольшее значение; 2) наименьшее значение?

1.14°. Найдите значение x, при котором равны значения функций:

1) $y = -3x + 4$ и $y = 5x - 12$;
2) $y = 4x - 7$ и $y = -2x + 5$;
3) $y = 3x^2 - 5x + 6$ и $y = -4x + 5 + 3x^2$;
4) $y = 2 - 4x - 3x^2$ и $y = 2x - 3x^2 - 5$.

1.15. Дана функция $y = 6 + \frac{1}{3}x$ с областью определения $D = \boldsymbol{R}$. Известно, что y принимает значения: 0; 3; –6; –9. Найдите соответствующие значения аргумента x. Укажите множество значений функции.

1.16. Дана функция y с областью определения $D = \boldsymbol{R}$. При каком значении x значение функции y равно p, если:

1) $y = 2x - 4$, $p = 6$;
2) $y = -3x + 4$, $p = 4$;
3) $y = (2x - 5)\frac{1}{3}$, $p = 12$;
4) $y = \frac{1}{4}(7 - 6x)$, $p = -4$?

Найдите множество значений функции.

1.17°. Сумма двух чисел равна 82. Одно из них равно x. Как зависит значение второго числа y от первого? Является ли эта зависимость функцией? Если да, то укажите область определения функции и множество ее значений.

1.18°. Разность двух чисел равна 20. Вычитаемое равно x. Как зависит уменьшаемое y от вычитаемого? Является ли эта зависимость функцией? Если да, то укажите область определения функции и множество ее значений.

1.19°. Забором длиной 80 м огорожена прямоугольная площадка. Ширина площадки равна x. Как зависит длина площадки y от ширины? Является ли эта зависимость функцией? Если да, то укажите область определения этой функции и множество ее значений, зная, что x — натуральное число.

1.20. Одна сторона прямоугольника равна x см, а другая — на 2 см меньше.

1) Найдите периметр y прямоугольника.
2) Докажите, что y является функцией от x.
3) Укажите область определения D функции y.
4) Найдите значения y, соответствующие значению x, равному 5 см, 10 см, 14 см, 16 см.
5) Найдите множество значений функции y.

1.21. Сторона квадрата равна x см.

1) Найдите площадь y квадрата.
2) Докажите, что y является функцией от x.
3) Укажите область определения D функции y.
4) Найдите значения y, соответствующие значению x, равному 11 см, 15 см, 17 см, 21 см.
5) Найдите множество значений функции y.

Укажите все те значения переменной x, при которых выражение имеет смысл (т. е. естественную область определения выражения) **(1.22—1.23).**

1.22. 1) $2x + 1$; 2) $3x - 2$; 3) $\frac{4x - 7}{3x - 6}$;

4) $\frac{5x - 1}{4x + 16}$; 5) $\frac{4}{x(x + 2)}$; 6) $\frac{-6}{(x - 3)x}$;

7) $\frac{9x - 4}{(2x - 1)(x - 8)}$; 8) $\frac{2x + 7}{(5x - 6)(2x - 10)}$.

1.23. 1) $\sqrt{3x - 4}$; 2) $\sqrt{2x + 5}$; 3) $\sqrt{4 - 0{,}5x}$;

4) $\sqrt{0{,}1 - 8x}$; 5) $\sqrt{(x - 6)^2}$; 6) $\sqrt{(9 + x)^2}$;

7) $\sqrt{x^2 + 7}$; 8) $\sqrt{(x - 1)^2 + 12}$; 9) $\sqrt{|x| - 4}$.

1.24. При каком значении аргумента значение функции $y = \frac{3 - x}{x + 5}$ равно:

1) 2; 2) 0; 3) 0,5; 4) $\frac{2}{3}$?

1.25°. При каких значениях x значения данной функции

1) положительны; 2) отрицательны:

а) $y = -1{,}5x + 3$; б) $y = 3{,}5x - 7$;

в) $y = -6 + \frac{1}{3}x$; г) $y = -2x + 9{,}6$;

д) $y = -\frac{1}{2}x - 4$; е) $y = \frac{1}{4}x + 2$?

1.26°. Укажите такие значения k, при которых функция $y = (k - 4)x^2$:

1) является квадратичной и имеет наибольшее значение;

2) является квадратичной и не имеет наибольшего значения;

3) не является квадратичной.

1.27. Функция $y = \frac{1}{3}x^2$ определена на множестве:

1) $[0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0]$; 3) $\boldsymbol{N}$;

4) $\boldsymbol{Z}$; 5) $[-4; 3]$; 6) $[-2; 4]$.

Укажите для нее множество значений, а также наименьшее и наибольшее значения.

1.28*. При каких значениях p не является квадратичной функция:

1) $y = (3p^2 - 5p + 8)x^2 + 4x - 1$;

2) $y = (-2p^2 + 3p - 1)x^2 - 6x + 5$;

3) $y = (-5p^2 - 4p - 1)x^2 + 7x + 3$;

4) $y = (4p^2 - 7p + 3)x^2 - 5x - 2$?

1.2. Способы задания функции

! ***Задать функцию*** — это значит указать ее область определения D и закон (правило), по которому для каждого значения аргумента x из множества D определяется одно значение функции y.

Существует много способов задания функции. Например, формулой, таблицей, графиком и др.

1. В алгебре основным способом задания функции является ***формула***. Во всех примерах предыдущего пункта функция задавалась формулой.

Пример 1. Пусть функция задана на множестве всех неотрицательных чисел, т. е. на промежутке $[0; +\infty)$, формулой $y = \sqrt{x}$. Здесь область определения функции совпадает с естественной областью определения выражения $\sqrt{x}$.

! Когда функция задана формулой, то правая часть этой формулы есть выражение с независимой переменной. Если область определения функции, заданной формулой, совпадает с естественной областью определения этого выражения, то ее обычно не указывают.

Например, когда мы говорим «*функция* $y = \sqrt{x}$», это означает, что указанной формулой задается функция на промежутке $[0; +\infty)$. А когда мы говорим «*функция* $y = \frac{5}{x^2 - 4}$», это означает, что функция рассматривается на естественной области определения выражения $\frac{5}{x^2 - 4}$, т. е. на множестве всех чисел, кроме $x = -2$ и $x = 2$ (эту область определения можно записать так: $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$).

а Выражать зависимость между переменными посредством формулы впервые стали Пьер Ферма и Рене Декарт около 1637 г. А термин «функция» появился только более чем полвека спустя в публикациях Готфрида Лейбница.

2. Во многих случаях функция задается ***таблицей***.

Пример 2. В справочной литературе по закаливанию приводятся рекомендации по дозированию длительности первого купания при разной температуре воды.

Если мы обозначим температуру воды в водоеме, выраженную в градусах по Цельсию, буквой t, а рекомендуемую врачами длительность первого купания, выраженную в минутах, — буквой q, то сможем составить таблицу, в которой показана зависимость длительности купания q от температуры воды t.

t, °С	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
q, мин	0,4	0,4	0,4	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	1	1,5

В этой таблице каждому значению t поставлено в соответствие определенное значение q. Таким образом, таблицей задается функция q от t.

Область определения этой функции образуют числа, стоящие в первой строке таблицы. А числа, стоящие во второй строке, — это те значения, которые может принимать функция, т. е. множество значений функции.

В рассмотренном примере множество значений функции состоит из четырех чисел: 0,4; 0,5; 1; 1,5. Наименьшее значение функции равно 0,4, функция принимает его при t, равном 14, 15 и 16. Наибольшее значение функции равно 1,5, функция принимает его при t, равном 24.

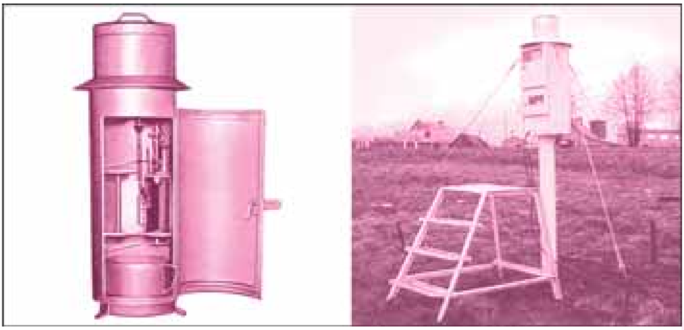
Пример 3. Рассмотрим таблицу из атласа по географии для 6—7-х классов. Обозначим в ней географическую широту точки земного шара, выраженную в градусах, буквой h, а длину дуги параллели на этой широте, соответствующую одному градусу и выраженную в километрах, — буквой l.

В таблице показана зависимость длины дуги параллели от географической широты.

h, °	0 экватор	10	20	30	40	50	60	70	80
l, км	111,3	109,6	104,6	96,5	85,4	71,7	55,8	38,2	19,4

В этой таблице каждому значению h поставлено в соответствие определенное значение l. Таким образом, таблицей задана функция l от h.

Область определения этой функции образуют числа, стоящие в первой строке таблицы. А во второй строке записаны все те значения, которые может принимать функция. Они образуют множество значений функции.



Плювиограф

Наименьшее значение функции равно 19,4, она принимает его при h, равном 80. Наибольшее значение функции равно 111,3, она принимает его при h, равном 0.

3. На практике изучение зависимостей между различными величинами часто приводит к рассмотрению функций, которые заданы ***графиками***. В таких случаях график получают с помощью самописца, установленного на соответствующем приборе.

Пример 4. На рисунке 1 изображен график изменения толщины слоя l выпавших дождевых осадков в зависимости от времени t. Этот график вычерчен самописцем специального прибора — плювиографа* (см. рис. вверху) в Белорусском гидрометцентре.

По графику (см. рис. 1) видно, что дождь начался в 5 ч 20 мин и прекратился в 7 ч 10 мин. Чтобы определить по графику, сколько миллиметров осадков выпало к 6 ч, надо из точки с координатой 6 на оси абсцисс (здесь это ось Ot)

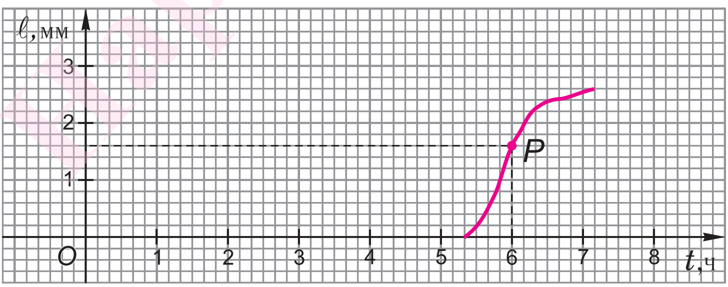


Рис. 1

* Название прибора «плювиограф» происходит от латинского слова *pluvia* — дождь.

провести перпендикуляр к оси Ot до пересечения с графиком в точке P. Проведя затем из этой точки перпендикуляр к оси ординат (здесь это ось Ol), получили, что значению времени $t = 6$ ч соответствует слой осадков $l = 1{,}6$ мм.

Итак, каждому значению переменной t, взятому на оси Ot из некоторого промежутка, с помощью этого графика можно найти соответствующее определенное значение переменной l на оси Ol. Следовательно, график задает функцию l от t.

При задании функции графиком ее значения вычисляются, как правило, приближенно. Эти значения зависят от точности приборов и инструментов, которые используются для изображения графика и последующих измерений при его чтении. Задание функции графиком дает наглядное представление о свойствах функции.

По графику (см. рис. 1) можно увидеть, что область определения функции — это промежуток $\left[5\frac{2}{6};\ 7\frac{1}{6}\right]$. Другими словами, область определения функции, заданной графически, — это проекция графика на ось абсцисс Ot (в нашем примере — это промежуток времени, когда шел дождь).

Множество значений функции l на этом графике образуют числа из промежутка $[0;\ 2{,}6]$. Этот промежуток является проекцией графика на ось ординат Ol.

?

1. Что значит задать функцию?
2. Приведите пример функции, заданной:

   а) формулой; б) таблицей; в) графиком.

   Назовите для нее область определения и множество значений.
3. Где на практике приходится рассматривать функции, заданные графиком? Приведите примеры.

Упражнения

1.29. Функция задана формулой $y = \frac{3x - 4}{2x + 6}$. Укажите ее область определения. При каком значении аргумента значение функции равно:

1) -1; 2) 2; 3) 3; 4) 0;
5) a; 6) $3k$; 7) $-p$; 8) $-2b$?

1.30°. Функция задана формулой $y = x^2 - 4$. Укажите ее область определения. Верно ли, что:

1) $y = 0$ при $x = -2$; 2) $y = 21$ при $x = -5$;
3) $y = 30$ при $x = 6$; 4) $y = 4$ при $x = 0$?

1.31°. Функция задана формулой $y = \frac{x^3 - 3}{2}$. Укажите ее область определения. Верно ли, что:

1) если $x = 0$, то $y = -\frac{3}{2}$;
2) если $x = -1$, то $y = -2$;
3) если $x = 3$, то $y = 12$;
4) если $x = 2$, то $y = 2{,}5$?

1.32. Функция задана формулой $y = \frac{2x - 3}{3x - 2}$. Укажите ее область определения. Найдите значение функции при:

1) $x = -1$; 2) $x = 2$; 3) $x = 3$; 4) $x = 0$;
5) $x = a$; 6) $x = 3k$; 7) $x = -p$; 8) $x = -2b$.

1.33*. Функция задана формулой $y = x^2$ на множестве $D = [2; 10]$. Сравните сумму значений функции при $x = a$ и $x = b$ со значением этой функции при $x = a + b$ (a, b и $a + b$ — числа из D).

1.34. Функция задана формулой $y = -3x + 5$. Найдите все значения x, при которых:

1) $y < 0$; 2) $y > 0$.

1.35. Функция задана формулой $y = (3 - \sqrt{10})(2x - 7)$. Найдите все значения x, при которых значения функции неотрицательны.

1.36. Функция задана формулой $y = (1 - \sqrt{2})(4 - 5x)$. Найдите все значения x, при которых значения функции отрицательны.

Функция задана формулой. Укажите ее область определения **(1.37—1.39)**.

1.37. 1) $y = \frac{\sqrt{x + 6}}{(x - 1)^2 - 4}$; 2) $y = \frac{\sqrt{x - 3}}{25 - (x - 3)^2}$;

3) $y = \frac{\sqrt{2x - 1}}{36 - 18x + 9x^2}$; 4) $y = \frac{\sqrt{4x - 39}}{49 - 28x + 4x^2}$.

1.38. 1) $y = |x| + 1$; 2) $y = 2 - |x|$; 3) $y = \frac{1}{|2x|}$;

4) $y = \frac{1}{|x - 3|}$; 5) $y = \frac{4}{\sqrt{x^2}}$; 6) $y = \frac{2x - 1}{\sqrt{(x - 5)^2}}$.

1.39. 1) $y = \dfrac{|x|}{2x^2 + 5x - 3}$; 2) $y = \dfrac{|x| - 1}{3x^2 + x - 4}$;

3) $y = \dfrac{\sqrt{x^2}}{5x^2 + 8x + 12}$; 4) $y = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{8x^2 - 14x - 15}$.

1.40. На рисунке 2 изображены графики прямых пропорциональностей. Для каждой из функций укажите формулу, которой можно ее задать.

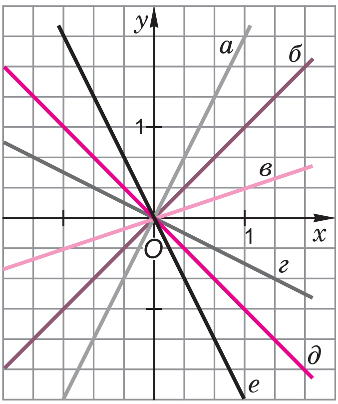


Рис. 2

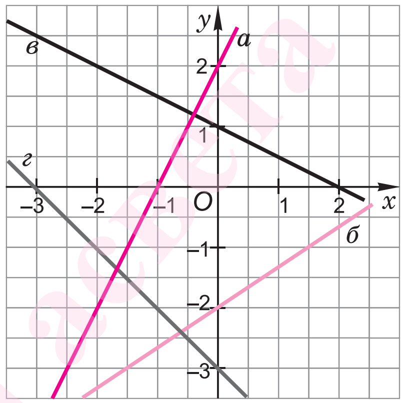


Рис. 3

1.41. На рисунке 3 изображены графики линейных функций. Для каждой прямой укажите формулу, задающую соответствующую функцию.

1.42. График функции — часть параболы — изображен на рисунке 4. Задайте эту функцию формулой на соответствующей области определения.

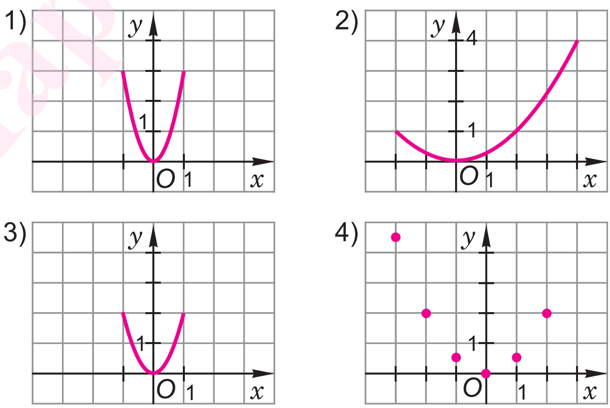


Рис. 4

1.43°. Таблица выражает зависимость силы давления F человека на пол кабины лифта, движущегося вверх с ускорением, от массы человека m.

m, кг	70	60	50	40
F, Н	756	648	540	432

По таблице найдите:

1) силу давления на пол движущейся вверх кабины лифта человека, масса которого 60 кг; 50 кг;

2) массу человека, поднимающегося в лифте, если его давление на пол равно 756 Н; 432 Н; 540 Н;

3) область определения и множество значений функции, заданной этой таблицей;

4) наибольшее и наименьшее значения функции, заданной этой таблицей.

1.44. Уровень воды в реке с 1 по 12 мая изменялся по сравнению с ординаром* следующим образом (см. табл.).

Дата	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Уровень воды, см	20	23	27	31	36	42	40	37	34	30	25	19

По таблице найдите:

1) какой уровень воды относительно ординара был 2 мая; 9 мая; 12 мая;

2) какого числа уровень воды относительно ординара составлял 27 см; 42 см; 37 см; 19 см;

3) область определения и множество значений функции, заданной этой таблицей;

4) наибольшее и наименьшее значения функции, заданной этой таблицей.

1.45°. Песок, нагретый до температуры 150 °С, остывал на воздухе. Каждые 10 мин производился замер температуры и данные заносились в таблицу.

t, мин	0	10	20	30	40	50	60	70
T, °С	150	111	84	66	52	42	35	20

* Ординар (от латинского слова *ordinarus* — обычный) — средний многолетний уровень воды в реках, заливах и т. п.

По таблице найдите:

1) какую температуру имел песок через 10 мин; 30 мин; 40 мин; 60 мин после начала измерений;

2) через сколько минут после начала измерений песок имел температуру 111 °C; 66 °C; 52 °C; 35 °C;

3) область определения и множество значений функции, заданной этой таблицей;

4) наибольшее и наименьшее значения функции, заданной этой таблицей.

1.46. В таблице указано, как в среднем изменяется масса ребенка (в зависимости от возраста) от рождения до 8 лет.

Возраст, годы	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Масса, кг	3,3	9,2	11,9	12,9	14,3	15,4	16,8	18,4	20,5

По таблице найдите:

1) среднюю массу ребенка в возрасте 3 лет; 5 лет; 7 лет;

2) в каком возрасте масса ребенка равна примерно 11,9 кг; 16,8 кг; 20,5 кг;

3) на сколько килограммов в среднем за год увеличивается масса ребенка:

а) за первые три года;

б) с трех до шести лет;

в) с четырех до восьми лет;

г) с шести до восьми лет;

4) на сколько килограммов в среднем увеличивается масса ребенка за первый; третий; пятый; седьмой; восьмой год;

5) область определения и множество значений функции, заданной этой таблицей;

6) наибольшее и наименьшее значения функции, заданной этой таблицей.

1.47°. На рисунке 5 дан график изменения толщины слоя l (мм) выпавших дождевых осадков в зависимости от времени t (ч).

1) Задает ли этот график функцию? Если да, то назовите ее область определения и множество значений.

2) В какое время начался дождь? Когда он закончился?

3) Укажите толщину слоя дождевых осадков в 21 ч 30 мин; 22 ч 10 мин; 22 ч 50 мин; 23 ч 30 мин.

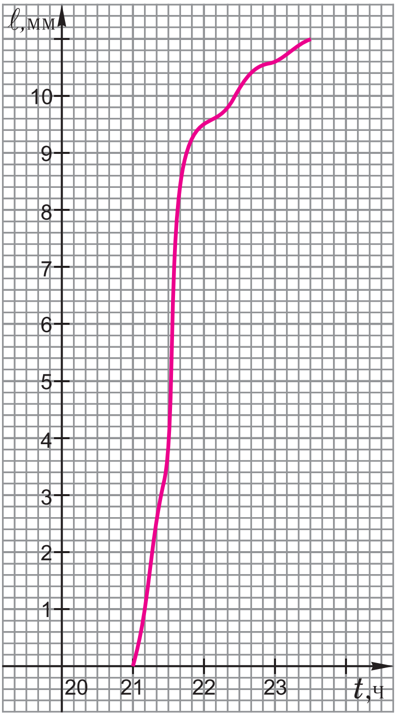


Рис. 5

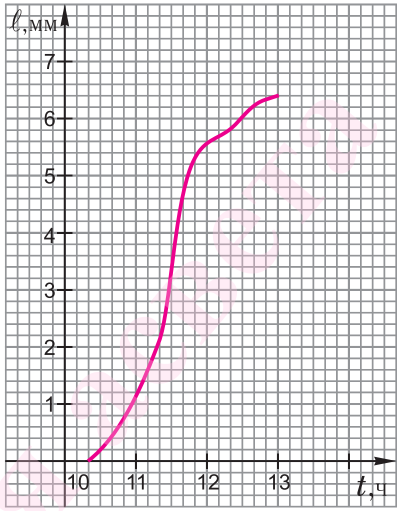


Рис. 6

4) Через сколько минут после начала дождя толщина слоя выпавших осадков равна 2 мм; 3 мм; 4,5 мм; 8 мм?
5) Как изменилась толщина слоя l выпавших осадков за первый час; за второй час?

1.48°. На рисунке 6 приведен график изменения толщины слоя l (мм) выпавших дождевых осадков в зависимости от времени t (ч).

1) Задает ли этот график функцию? Если да, то назовите ее область определения и множество значений.
2) В какое время начался дождь? В какое время он закончился?
3) Укажите толщину слоя дождевых осадков в 10 ч 50 мин; 11 ч 20 мин; 12 ч 30 мин; 12 ч 40 мин.
4) Через сколько минут после начала дождя толщина слоя выпавших осадков равна 1,6 мм; 2,2 мм; 4,8 мм?
5) Как изменилась толщина слоя l выпавших осадков с 11 ч до 12 ч; с 12 ч до 13 ч?

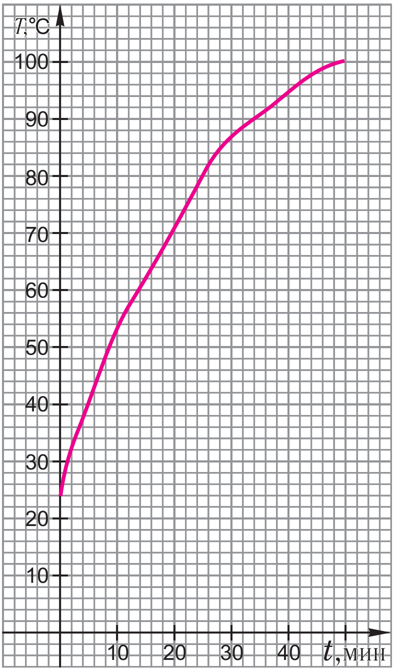


Рис. 7

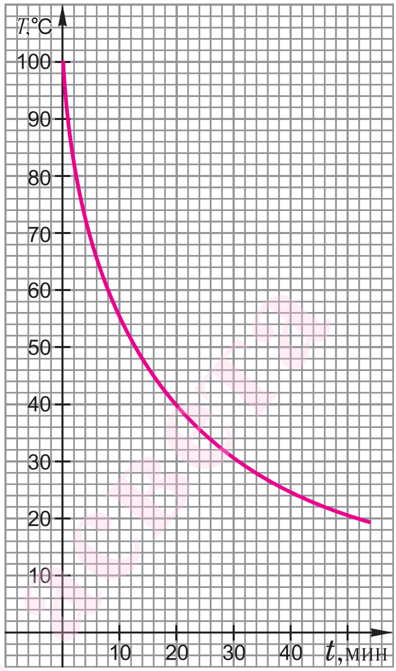


Рис. 8

1.49°. На рисунках 7 и 8 даны графики изменения температуры T (°C) воды в зависимости от времени t (мин). По каждому из них ответьте на вопросы:

1) Задает ли график функцию? Если да, то назовите ее область определения и множество значений.
2) Какой была температура воды в начале наблюдения?
3) Какой стала температура воды через 10 мин; 20 мин; 30 мин; 40 мин после начала наблюдения?
4) Через сколько минут после начала наблюдения температура воды была равна 30 °C; 50 °C; 60 °C; 100 °C?
5) Как изменилась температура воды за первые 10 мин; 20 мин; 30 мин?
6) Как изменилась температура воды за последние 10 мин?
7) Сколько минут велось наблюдение?

1.50°. По рисункам 7 и 8 составьте таблицу значений температуры воды через каждые 2 мин после первых 20 мин наблюдения.

1.3. График функции

С графиками линейной и квадратичной функций мы познакомились в предыдущих классах.

Пример 1. Пусть функция задана на промежутке [2; 6] формулой

$$y = \frac{x + 7}{x}.$$

Найдем ее значение для каждого из значений аргумента 2, 3, 4, 5, 6 и поместим в таблицу полученные пары чисел:

x	2	3	4	5	6
y	$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$2\frac{3}{4}$	$2\frac{2}{5}$	$2\frac{1}{6}$

Для каждой пары соответствующих значений x и y из таблицы отметим точку $(x; y)$ на координатной плоскости Oxy (рис. 9). Рисунок дает некоторое наглядное представление о множестве точек плоскости, координатами которых являются соответствующие значения аргумента и функции.

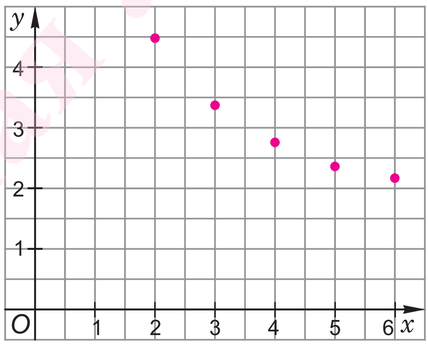


Рис. 9

Наше представление будет тем точнее, чем «гуще» мы будем выбирать значения аргумента, а следовательно, и значения функции (рис. 10). На этом рисунке значения аргумента выбраны через каждые 0,25 единицы длины.

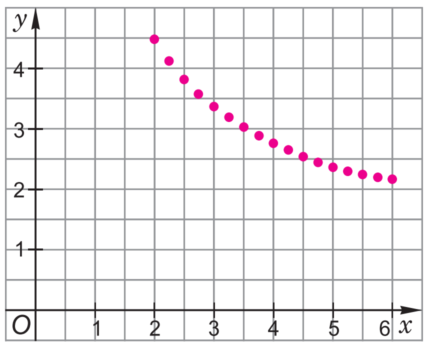


Рис. 10

Итак, мы видим, что функции $y = \frac{x + 7}{x}$ с областью определения [2; 6] на координатной плоскости соответствует некоторое множество точек. Это множество точек называется графиком данной функции.

Определение. ***Графиком функции*** **называется множество всех точек $M(x;\ y)$ на координатной плоскости, где x принимает значения из области определения, а y — соответствующие им значения функции.**

Чтобы изобразить график функции $y = \frac{x+7}{x}$, заданной на промежутке [2; 6], мы должны вычислить для каждого действительного числа x из этого промежутка соответствующее значение y и полученные точки $(x;\ y)$ отметить на координатной плоскости. Множество всех этих точек и есть график нашей функции.

! Поскольку это множество бесконечное, то осуществить все указанные вычисления невозможно. Поэтому график функции $y = \frac{x+7}{x}$ с областью определения [2; 6] можно изобразить только приближенно, соединив отмеченные на плоскости точки непрерывной плавной кривой (рис. 11).

Но даже это приближенное изображение дает хорошее представление о свойствах функции. Глядя на него, сразу можно сказать, что наименьшее значение функции равно $2\frac{1}{6}$, она принимает его в точке 6, т. е. при $x = 6$.

Наибольшее значение функции равно $4\frac{1}{2}$, она принимает его в точке 2, т. е. при $x = 2$.

Множеством значений функции является промежуток $\left[2\frac{1}{6};\ 4\frac{1}{2}\right]$. Видно также, что график функции не пересекается с осями координат и лежит в I координатном угле.

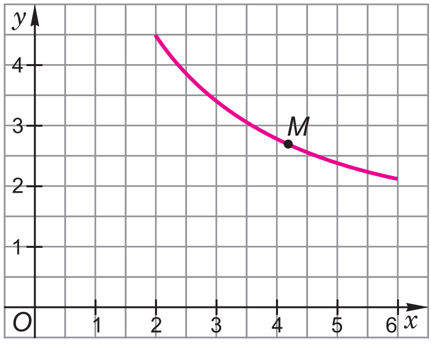


Рис. 11

Если точка $M(a;\ b)$ принадлежит графику функции $y = \frac{x+7}{x}$, то говорят еще, что *ее координаты удовлетворяют уравнению* $y = \frac{x+7}{x}$. Это означает, что, подставив в это уравнение значения $x = a$ и $y = b$, получим верное числовое равенство $b = \frac{a+7}{a}$.

Например, уравнению $y = \frac{x+7}{x}$ удовлетворяют координаты точек $\left(2;\ 4\frac{1}{2}\right)$, $\left(3;\ 3\frac{1}{3}\right)$, $\left(4;\ 2\frac{3}{4}\right)$, $\left(5;\ 2\frac{2}{5}\right)$, $\left(6;\ 2\frac{1}{6}\right)$.

В рассмотренном примере показано, как на координатной плоскости изображается график функции, заданной формулой (он представляет собой линию). Из этого же примера понятно, как изобразить график функции, заданной таблицей (он представляет собой конечное множество отдельных точек).

Пример 2. Изобразить график функции $y = \frac{1}{6}x^3 - 4$.

Решение. Поскольку область определения функции не указана, то по договоренности это естественная область определения выражения $\frac{1}{6}x^3 - 4$, т. е. множество $\boldsymbol{R}$.

Придадим переменной x несколько значений и найдем соответствующие значения y:

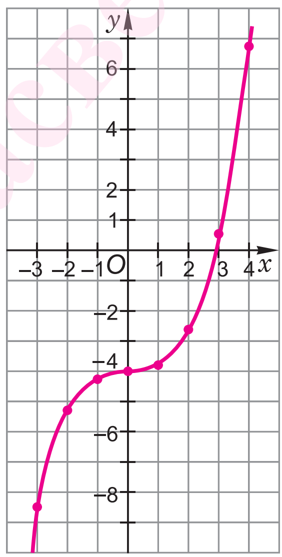


Рис. 12

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$-8\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{3}$	$-4\frac{1}{6}$	-4	$-3\frac{5}{6}$	$-2\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$6\frac{2}{3}$

Отметив эти точки на плоскости Oxy и соединив их плавной линией, получим изображение графика функции $y = \frac{1}{6}x^3 - 4$ (рис. 12).

Обратите внимание: когда областью определения функции является множество $\boldsymbol{R}$, то его изображением будет ось абсцисс. Ее нельзя уместить на листе бумаги, поэтому и изображение графика такой функции нельзя уместить на листе бумаги; можно изобразить только часть ее графика.

Выясним, может ли линия L на рисунке 13 быть изображением графика некоторой функции.

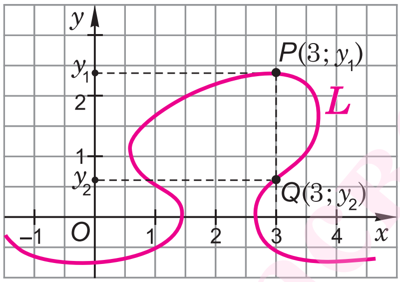


Рис. 13

Мы видим, что есть значение x, например $x = 3$, которому на линии L соответствуют две различные точки, а значит, два различных значения y. Но по определению функции каждому значению аргумента ставится в соответствие только одно значение функции. Значит, линия L не является изображением графика функции.

Сформулируем ***основное свойство графика функции***: на графике функции нет двух различных точек с одной и той же абсциссой.

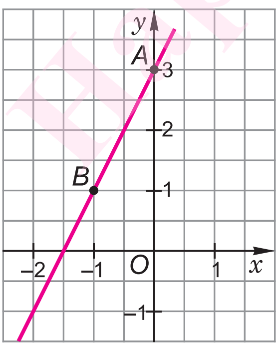


Рис. 14

Пример 3. Найти множество значений функции, используя ее график:

а) $y = 2x + 3$; б) $y = -3$.

Решение.

а) Графиком функции $y = 2x + 3$ является прямая (рис. 14); она проходит через точки $A(0; 3)$ и $B(-1; 1)$.

Понятно, что множество значений функции $y = 2x + 3$ — это проекция ее графика на ось Oy, т. е. множество $(-\infty; +\infty)$.

б) Графиком функции $y = -3$ является прямая, проходящая через точку $(0; -3)$ параллельно оси Ox (рис. 15).

Значит, множество значений этой функции — проекция графика на ось Oy — состоит из одной точки -3.

Ответ: а) $(-\infty; +\infty)$; б) $\{-3\}$.

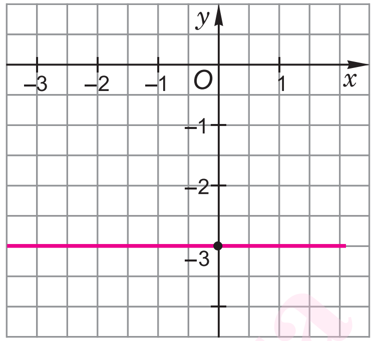


Рис. 15

Пример 4. Найти множество значений функции

$$y = 2x^2 + 3x - 5, \qquad (*)$$

используя ее график.

Решение. Изобразим схематично график функции (*). Мы знаем, что графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$. Значит, вершиной параболы (*) является точка $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{49}{8}\right)$; ее ось симметрии — прямая $x = -\frac{3}{4}$ — проходит через вершину и параллельна оси Oy (рис. 16).

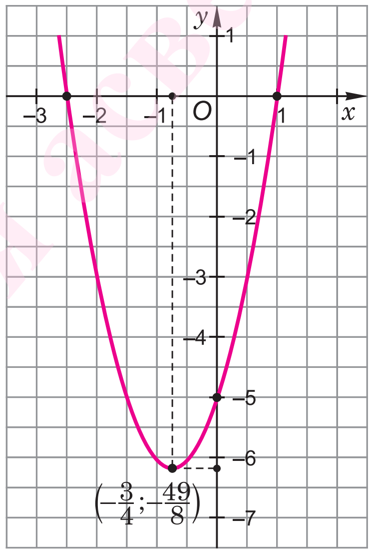


Рис. 16

Корни квадратного уравнения $2x^2 + 3x - 5 = 0$ — $x_1 = -2{,}5$ и $x_2 = 1$ — абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox. А ордината точки пересечения графика функции с осью Oy равна -5.

Все это позволяет дать схематичное изображение параболы (*) и записать множество значений функции (*) — промежуток $\left[-\frac{49}{8}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left[-\frac{49}{8}; +\infty\right)$.

?

1. Что называется графиком функции?
2. Что означает выражение «координаты точки $M(a; b)$ удовлетворяют уравнению $y = 3x^2 - 5$»?
3. Сформулируйте основное свойство графика функции.

Упражнения

1.51°. Функция задана формулой $y = 2x(x - 4)$. Принадлежит ли графику функции точка:

1) $A(-6; 2)$; 2) $B(0; 0)$; 3) $C(2,5; 3)$;
4) $D(4; 3,6)$; 5) $M(4; 0)$; 6) $K(6; 9)$?

1.52°. Функция задана формулой $y = \sqrt{x^2 - 1} + 3$. Принадлежит ли графику функции точка:

1) $A(\sqrt{10}; 6)$; 2) $B(-\sqrt{5}; 1)$; 3) $C(0; 2)$;
4) $D(-1; 1)$; 5) $M(1; 3)$; 6) $K(11; 13)$?

1.53°. Функция задана формулой $y = \frac{x + 6}{x}$ на промежутке $[1; 10]$.

1) Заполните таблицу, перечертив ее в тетрадь.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y										

2) Для каждой пары чисел x и y из таблицы изобразите на координатной плоскости точку $(x; y)$.
3) Соедините отмеченные точки непрерывной кривой.
4) Назовите множество значений функции по изображению ее графика.
5) Назовите наименьшее и наибольшее значения функции.

1.54. Функция задана формулой $y = \frac{x^2 + 9}{2x}$ на промежутке $[2; 5]$.

1) Заполните таблицу, перечертив ее в тетрадь.

x	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y							

2) Изобразите график функции, используя данные таблицы.
3) Назовите множество значений функции; наименьшее значение функции; наибольшее значение функции.
4) В каком координатном угле расположен график функции?

1.55. Функция задана формулой $y = \dfrac{x^2 + 6}{2x}$ на множестве $\boldsymbol{N}$. Изобразите ее график.

1.56. Функция задана формулой на множестве D:

1) $y = x^2 - 2x,\ D = [2;\ 4]$;

2) $y = \frac{1}{2}x^3 - 4,\ D = [-2;\ 2]$.

а) Изобразите график функции.

б) Назовите область определения и множество значений функции.

в) Назовите наименьшее и наибольшее значения функции.

г) В каких координатных углах расположен график функции?

д) Пересекает ли график функции оси координат? Если да, то в каких точках?

1.57. Функция задана формулой $y = \dfrac{-6}{x + 2}$ на промежутке $[-1;\ 4]$.

Изобразите ее график и выполните задания б) — д) из упражнения **1.56**.

1.58*. При каких значениях a точка $M(3a;\ -2a)$ принадлежит графику функции:

1) $y = x^2$; 2) $y = -x^2$;
3) $y = 2x - 8$; 4) $y = 7 - 3x$;
5) $y = x^2 - 7$; 6) $y = 11 - x^2$?

1.59. Изобразите график функции, заданной формулой $y = x^2$ на множестве:

1) $\boldsymbol{N}$; 2) $\boldsymbol{Z}$;
3) всех четных чисел; 4) всех нечетных чисел;
5) $[-1;\ 2]$; 6) $[-3;\ 1]$;
7) $\{-2;\ -1\} \cup [0;\ 1]$; 8) $[-2;\ -1] \cup \{0;\ 1\}$;
9) $[-3;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$; 10) $(-\infty;\ -1] \cup [1;\ 2]$.

1.60. На множестве $\{4;\ 4{,}25;\ 5;\ 5{,}21;\ 8;\ 8{,}41\}$ функция y задана формулой. Изобразите график функции, если:

1) $y = 2\sqrt{x - 4} + 1$; 2) $y = 2\sqrt{x - 4}$;
3) $y = \left(2\sqrt{x - 4}\right)^2$; 4) $y = 1 - \sqrt{x - 4}$.

1.61. На множестве $[-2; +\infty)$ функция y задана формулой. Изобразите график функции, если:

1) $y = 2x^2 - 3$; 2) $y = 2x - 3$;

3) $y = \sqrt{2 + x}$; 4) $y = \frac{1 - x}{3}$.

1.62. На множестве $\boldsymbol{Z}$ функция y задана формулой:

1) $y = x^3 + 1$; 2) $y = 3x + 1$;

3) $y = \frac{x}{3} + 1$; 4) $y = \frac{3}{x} + 1$.

Изобразите график функции.

1.63. Изобразите график функции, заданной на множестве $[1; 5]$ формулой:

1) $y = \frac{2x - 1}{x}$; 2) $y = \frac{x - 2}{2x}$;

3) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$; 4) $y = \frac{2}{x} - 1$.

1.64. Функция задана формулой $y = 7\sqrt{5 - x} + a$. Определите значение a, если ее график проходит через точку:

1) $(1; 16)$; 2) $(-4; -12)$; 3) $(-4; 7)$;

4) $(-20; 3)$; 5) $(0; 3\sqrt{5})$; 6) $(2; -4\sqrt{3})$.

1.65°. Принадлежит ли графику функции $y = -250x^2$ точка:

1) $K(-1; -250)$; 2) $M(-3; -2250)$;

3) $T(\sqrt{2}; -500)$; 4) $P(0{,}2; -10)$;

5) $E(0{,}1; -2{,}5)$; 6) $B(-3; 750)$?

1.66. Найдите k и b, если известно, что прямая $y = kx + b$ параллельна прямой $y = 4x$ и проходит через точку:

1) $A(3; 10)$; 2) $C(-8; 4)$;

3) $B\left(-\frac{1}{2}; 6\right)$; 4) $D\left(1\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)$.

1.67°. Задайте формулой прямую пропорциональность, если известно, что ее график проходит через точку:

1) $M(2; -7)$; 2) $N(-4; -2{,}5)$;

3) $P(-8{,}5; 9)$; 4) $T(3{,}6; 1{,}8)$.

1.68. Задайте формулой квадратичную функцию, график которой пересекает ось Oy в той же точке, что и график функции:

1) $y = -x + 3$; 2) $y = x - 5$;

3) $y = -6x - 7$; 4) $y = -7x + 8$.

1.69. 1) Прямая $y = kx$ проходит через точку $M(-4;\ 6)$. Проходит ли эта прямая через точку $P(6;\ -9)$?
2) Прямая $y = kx$ проходит через точку $N(-8;\ -5)$. Проходит ли эта прямая через точку $A\left(\frac{2}{5};\ \frac{1}{4}\right)$?

1.70. График функции $y = ax^2$ проходит через точку:

1) $M(2;\ -6)$; 2) $K(-2;\ -8)$;
3) $P(-2;\ 8)$; 4) $T(2;\ 4)$.

Задайте функцию формулой и изобразите ее график.

1.71. График функции $y = x^2 + kx$ проходит через точку:

1) $M(-2;\ -12)$; 2) $P(6;\ -12)$.

Найдите k.

1.72. Изобразите график функции $y = (x - m)^2 - 2$ и укажите его ось симметрии, если известно, что ему принадлежит точка:

1) $A(-6;\ 2)$; 2) $B(5;\ -1)$;
3) $C(4;\ 7)$; 4) $D(-3;\ -2)$.

1.73. Изобразите график функции, заданной формулой $y = 0{,}6x$, с областью определения:

1) $\boldsymbol{R}$; 2) $(0;\ +\infty)$; 3) $[-3;\ 5]$;
4) $\{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$; 5) $(-\infty;\ 0]$; 6) $\boldsymbol{Z}$.

1.74. Изобразите графики функций $y = ax$ и $y = ax^2$, если:

1) $a > 0$; 2) $a < 0$;
3) $0 < a < 1$; 4) $a > 1$;
5) $a < -1$; 6) $-1 < a < 0$.

1.75. Изобразите схематично в одной системе координат графики функций $y = ax$ и $y = bx$, если:

1) $a > 0,\ b > 0,\ a > b$; 2) $a < 0,\ b < 0,\ a < b$;
3) $a > 0,\ b < 0$; 4) $a < 0,\ b > 0$;
5) $a < 0,\ b > 0,\ |a| = |b|$;
6) $a > 0,\ b < 0,\ |a| < 1,\ |b| > 1$.

1.76. При каких значениях a точка $K(a^2;\ -2a)$ принадлежит графику функции:

1) $y = \frac{3}{2}x$; 2) $y = \frac{2}{3}x$;
3) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$; 4) $y = \frac{5}{7}x + 1\frac{1}{7}$;
5) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; 6) $y = -1\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$?

1.77. При каких значениях a точка $N(a-1;\ (a+2)^2)$ принадлежит графику функции:

1) $y = 6x + 13$;
2) $y = -3{,}5x - 12$;
3) $y = -0{,}4x - 0{,}6$;
4) $y = \frac{3}{4}x + 2\frac{1}{4}$?

1.78. Изобразите график квадратичной функции и укажите множество значений функции, ее наибольшее и наименьшее значения (если они есть):

1) $y = x^2 + 2$;
2) $y = x^2 - 3$;
3) $y = -3 - x^2$;
4) $y = 2 - x^2$;
5) $y = -(3 - x)^2$;
6) $y = (x - 2)^2$;
7) $y = 1 - (x + 2)^2$;
8) $y = -3 - (x + 3)^2$.

1.79. Изобразите график квадратичной функции и укажите его ось симметрии:

1) $y = (x - 4)^2 + 3$;
2) $y = (5 - x)^2 + 2$;
3) $y = -(x + 2)^2 - 1$;
4) $y = -(x - 3)^2 - 4$;
5) $y = 3x^2 - 9x$;
6) $y = -2x^2 + 8x$;
7) $y = (x + 3)(x - 2)$;
8) $y = (x + 3)(x + 1)$;
9) $y = 2x^2 + x - 6$;
10) $y = 2x^2 - x - 5$.

1.80*. Изобразите график функции:

1) $y = 2x|x|,\ x \geqslant 0$;

2) $y = -2x|x|,\ x \leqslant 0$;

3) $y = \frac{1}{2}x|x|,\ x \in \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$;

4) $y = -\frac{1}{2}x|x|,\ x \in \{-4;\ -3;\ -2;\ -1\}$;

5) $y = 2x^2 - |x| - 5,\ x \geqslant 1$;

6) $y = 2x^2 + |x| - 6,\ x \leqslant -2$.

1.4. Нули функции и промежутки знакопостоянства

Пример 1. На рисунке 17 изображен график функции $y = x^2 - 4$ с областью определения — промежутком $[-3;\ 1]$. Этот график пересекается с осью абсцисс в точке с координатами $(-2;\ 0)$, т. е. при $x = -2$ функция принимает значение $y = 0$.

Определение. **Значения аргумента, при которых функция принимает значение, равное 0, называются** ***нулями функции*****.**

Так, функция $y = x^2 - 4$ с областью определения $D = [-3;\ 1]$ имеет единственный нуль — число -2 (см. рис. 17).

А функция $y = x^2 - 4$ с областью определения $D = [-3;\ 4]$ имеет два нуля — числа -2 и 2 (поясните почему).

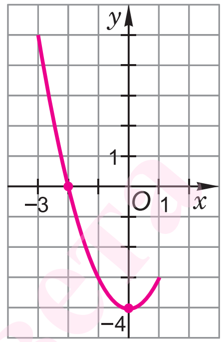


Рис. 17

Пример 2. Найти нули функции, заданной формулой $y = x^3 - 9x$ на множестве D, если:

а) $D = (-\infty;\ 1]$; б) $D = [-2;\ +\infty)$;
в) $D = \boldsymbol{R}$; г) $D = (-4;\ 0)$;
д) $D = (3;\ 20]$.

Решение. а) Подставим $y = 0$ в формулу и найдем корни полученного уравнения:

$$x^3 - 9x = 0;$$
$$x(x^2 - 9) = 0;$$
$$x(x - 3)(x + 3) = 0;$$
$$x = 0 \quad \text{или} \quad x - 3 = 0 \quad \text{или} \quad x + 3 = 0;$$
$$x = 0 \quad \text{или} \quad x = 3 \quad \text{или} \quad x = -3.$$

Из этих трех чисел промежутку $(-\infty;\ 1]$ принадлежат только два: $x = -3$ и $x = 0$, — они и будут нулями функции $y = x^3 - 9x$, заданной на множестве $D = (-\infty;\ 1]$.

б) Поскольку из трех найденных чисел промежутку $[-2;\ +\infty)$ принадлежат только $x = 0$ и $x = 3$, то они и будут нулями функции $y = x^3 - 9x$, заданной на множестве $D = [-2;\ +\infty)$.

в) Нулями рассматриваемой функции являются числа -3; 0; 3 (поясните почему).

г) Рассматриваемая функция имеет единственный нуль — это число -3 (поясните почему).

д) Рассматриваемая функция нулей не имеет (поясните почему).

Пример 3. Функция задана графиком на промежутке $D = [-7;\ 2]$ (рис. 18). Указать нули этой функции.

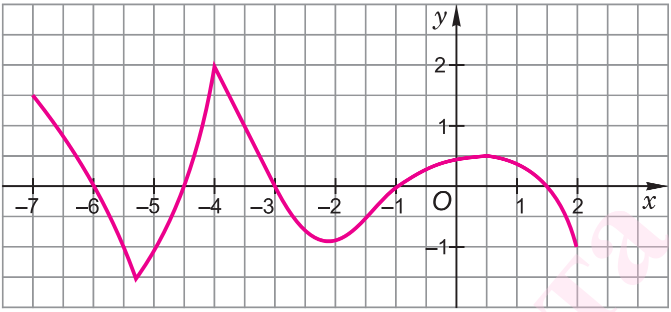


Рис. 18

Решение. Данная функция принимает значения, равные нулю, в тех точках, где ее график пересекается с осью Ox. Поскольку $y = 0$ при x, равном –6; –4,5; –3; –1 и 1,5, то эти числа и являются нулями данной функции.

Ответ: –6; –4,5; –3; –1; 1,5.

Пример 4. Найти нули функции, заданной таблицей.

x	–9	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	2	0	0	1,3	1,7	3	5	2	1	–3	–2	0	1	3	2

Решение. Поскольку $y = 0$ при значениях x, равных –8; –7 и 2, то эти числа и являются нулями данной функции.

Ответ: –8; –7; 2.

Рассмотрим функцию, график которой изображен на рисунке 18. Мы видим, что на промежутке [–7; –6) значения этой функции только положительные числа; то же самое и на промежутках (–4,5; –3) и (–1; 1,5). А на промежутках (–6; –4,5), (–3; –1) и (1,5; 2] значения функции только отрицательные числа.

Определение. Промежутки, на которых значения функции либо только положительные, либо только отрицательные, называются *промежутками знакопостоянства функции*.

Например, значения функции $y = x^2 - 4$ с областью определения $D = [-3;\ 1]$ (см. пример 1, рис. 17) положительны на промежутке [–3; –2) и отрицательны на промежутке (–2; 1].

?

1. Что называется нулями функции?
2. Какие промежутки называются промежутками знакопостоянства функции? Назовите их для примера 3.

Упражнения

1.81°. Найдите нули функции, заданной формулой:

1) $y = 3x - 4$; 2) $y = 5 - 2x$;

3) $y = 9 - 4x$ на множестве $D = \boldsymbol{N}$;

4) $y = 7 + 3x$ на множестве $D = \boldsymbol{Z}$;

5) $y = \dfrac{1}{x-2}$ на множестве $D = [3;\ +\infty)$;

6) $y = \dfrac{x+3}{x-3}$ на множестве $D = (3;\ +\infty)$;

7) $y = \dfrac{x^2+7x}{x+2}$ на множестве $D = (-\infty;\ -2)$;

8) $y = \dfrac{x^2-8x}{x-5}$ на множестве $D = (5;\ +\infty)$;

9) $y = \dfrac{x^2-x-12}{x-4}$;

10) $y = \dfrac{x^2+2x-15}{x+5}$.

1.82°. На рисунке 19 функция задана графиком на промежутке $D = [-4;\ 6]$, а на рисунке 20 — на промежутке $D = [-6;\ 4{,}5]$.

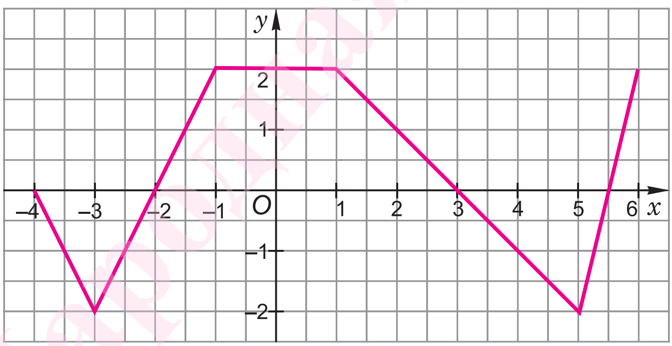


Рис. 19

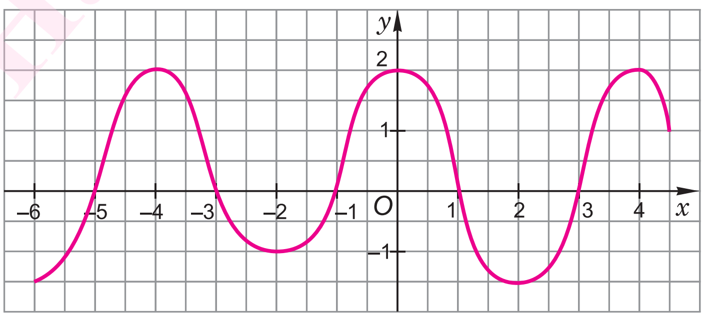


Рис. 20

Укажите для каждой из функций:

а) множество значений;
б) нули;
в) промежутки знакопостоянства;
г) наибольшее значение;
д) наименьшее значение.

1.83. Найдите нули функции, заданной таблицей.

1)

x	–5	–4	–3	–2	–1	0
y	9	0	4	0	1,2	0

2)

x	–2	–1	0	1	2	3
y	–3	–1,5	0	2	1	0

1.84. Найдите координаты точек пересечения с осями Ox и Oy графика функции, заданной формулой:

1) $y = 0{,}6x - 18$; 2) $y = 25 + 0{,}5x$;
3) $y = 1{,}7x + 6{,}8$; 4) $y = -1{,}21x - 1{,}1$.

Укажите нули и промежутки знакопостоянства функции.

1.5. Возрастание и убывание функции на промежутке

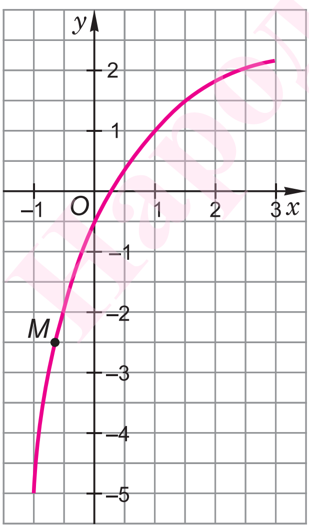


Рис. 21

Пример 1. На рисунке 21 изображен график функции, заданной формулой $y = \frac{4x - 1}{x + 2}$ на промежутке $[-1; 3]$.

Представим себе, что некоторая точка M движется по графику так, что ее абсцисса увеличивается, т. е. точка движется слева направо. По рисунку видно, что при таком движении точки M ординаты будут увеличиваться, т. е. точка M будет как бы «взбираться» вверх по графику. В самом деле, если мы выберем из промежутка $[-1; 3]$ два значения аргумента x_1 и x_2 такие, что $x_2 > x_1$, то по формуле $y = \frac{4x - 1}{x + 2}$ получим соответствующие значения функции y_1 и y_2, причем $y_2 > y_1$. Например, если $x_1 = -0{,}5$, а $x_2 = 0$, то $y_1 = -2$, $y_2 = -0{,}5$ (убедитесь в этом), т. е. $y_2 > y_1$. Другими словами, при увеличении значения аргумента x значение функции y увеличивается. Такую функцию называют ***возрастающей***.

Определение. **Функция называется *возрастающей на некотором промежутке*, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции, т. е. для любых x_1 и x_2, принадлежащих промежутку, из того, что $x_2 > x_1$, следует $y_2 > y_1$.**

Пример 2. На рисунке 22 изображен график функции, заданной формулой $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$ на промежутке [0; 3].

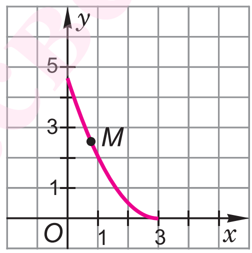


Рис. 22

Представим теперь, что некоторая точка M движется по данному графику так, что ее абсцисса увеличивается, т. е. точка движется слева направо. По рисунку легко увидеть, что при таком движении точки M ординаты будут уменьшаться; точка M будет как бы «скатываться» по графику вниз. В самом деле, если мы выберем из промежутка [0; 3] два значения аргумента x_1 и x_2 такие, что $x_2 > x_1$, то по формуле $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$ получим соответствующие значения функции y_1 и y_2, причем $y_2 < y_1$. Например, если $x_1 = 1$, а $x_2 = 2$, то $y_1 = 2$, $y_2 = 0{,}5$ (убедитесь в этом), т. е. $y_2 < y_1$. Другими словами, при увеличении значения аргумента x значение функции y уменьшается. Такую функцию называют ***убывающей***.

Определение. **Функция называется *убывающей на некотором промежутке,* если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции, т. е. для любых x_1 и x_2, принадлежащих промежутку, из того, что $x_2 > x_1$, следует $y_2 < y_1$.**

▲ Когда функция задана формулой, то, чтобы выяснить, является она возрастающей или убывающей на некотором промежутке, не обязательно изображать ее график. Как это можно сделать иначе, покажем на следующих примерах.

Рассмотрим функцию из примера 1. Докажем, что она возрастающая.

Пусть x_1 и x_2 принадлежат промежутку [–1; 3] и $y_1 = \frac{4x_1 - 1}{x_1 + 2}$, $y_2 = \frac{4x_2 - 1}{x_2 + 2}$. Сравним y_2 и y_1. Если $x_2 > x_1$, то получим:

$$y_2 - y_1 = \frac{4x_2 - 1}{x_2 + 2} - \frac{4x_1 - 1}{x_1 + 2} =$$

$$= \frac{4x_1x_2 - x_1 + 8x_2 - 2 - 4x_1x_2 + x_2 - 8x_1 + 2}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} =$$

$$= \frac{9(x_2 - x_1)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} > 0.$$

Действительно, так как $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Для любого значения x из промежутка [–1; 3] сумма $x + 2 > 0$, значит, $x_1 + 2 > 0$ и $x_2 + 2 > 0$. Поэтому разность

$$y_2 - y_1 = \frac{9(x_2 - x_1)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}$$

является положительным числом. Следовательно, $y_2 > y_1$.

Таким образом, мы доказали, что если $x_2 > x_1$, то $y_2 > y_1$, а это значит, что функция $y = \frac{4x - 1}{x + 2}$ на промежутке [–1; 3] возрастающая. ☒

Рассмотрим функцию из примера 2. Докажем, что она убывающая.

Пусть x_1 и x_2 принадлежат промежутку [0; 3] и $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2$, $y_2 = \frac{1}{2}(x_2 - 3)^2$. Пусть $x_2 > x_1$. Сравним y_2 и y_1. Рассмотрим разность $y_2 - y_1$ и определим ее знак:

$$y_2 - y_1 = \frac{1}{2}(x_2 - 3)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - 3)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}((x_2 - 3) - (x_1 - 3))((x_2 - 3) + (x_1 - 3)) =$$

$$= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 6) < 0.$$

Действительно, так как $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Для любого значения x из промежутка [0; 3] разность $x - 3 \leqslant 0$. Значит, $x_2 - 3 \leqslant 0$, $x_1 - 3 < 0$ (поясните, почему второе неравенство строгое) и $x_2 + x_1 - 6 < 0$. Поэтому разность $y_2 - y_1$ — отрицательное число, следовательно, $y_2 < y_1$.

Таким образом, мы доказали, что если $x_2 > x_1$, то $y_2 < y_1$. Это значит, что функция $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$ на промежутке [0; 3] убывающая. ☒▲

Пример 3. Пусть функция $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$ определена на множестве $\boldsymbol{R}$. Найти промежутки, на которых функция:

а) возрастает; б) убывает.

Решение. Изобразим параболу $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$ (рис. 23).

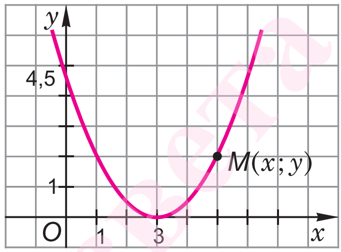


Рис. 23

а) Рассмотрим ее сначала на промежутке [3; +∞). Представим себе, что точка $M(x; y)$ движется по параболе так, что ее абсцисса x увеличивается, т. е. точка движется слева направо. Очевидно, что при таком движении точки M ордината y также будет увеличиваться. Таким образом, при значениях x из промежутка [3; +∞) большему значению x соответствует большее значение y. Другими словами, функция $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$ возрастает на промежутке [3; +∞). Этот промежуток называют ***промежутком возрастания функции*** $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$.

б) Аналогично, при рассмотрении движения точки $M(x; y)$ по параболе слева направо при $x \in (-\infty; 3]$ (рис. 24) устанавливается, что с увеличением x значения y уменьшаются. Таким образом, функция $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$ убывает на промежутке (–∞; 3]. Этот промежуток называют ***промежутком убывания функции*** $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$.

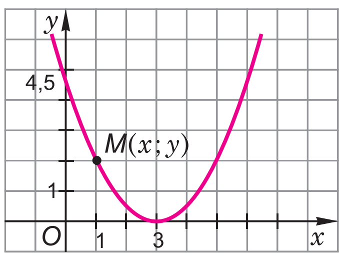


Рис. 24

Ответ: а) промежуток возрастания [3; +∞);
б) промежуток убывания (–∞; 3].

! Заметим, что при поиске промежутка возрастания (убывания) функции принято указывать промежуток наибольшей длины. Так, в примере 3 а) в ответе записали промежуток [3; +∞), а не, например, [3; 6,5].

Изучая в дальнейшем функции, мы будем указывать для каждой из них следующие свойства:

1) область определения;
2) множество значений;
3) наибольшее и наименьшее значения;
4) координаты точек пересечения графика с координатными осями;
5) нули функции;
6) промежутки знакопостоянства;
7) промежутки возрастания, убывания.

?

1. Какая функция называется возрастающей на промежутке?
2. Какая функция называется убывающей на промежутке?
3*. Как доказывают, что функция является возрастающей (убывающей) на некотором промежутке?

Упражнения

1.85°. Функция задана графиком (рис. 25). Назовите для этой функции промежутки:

а) возрастания; б) убывания.

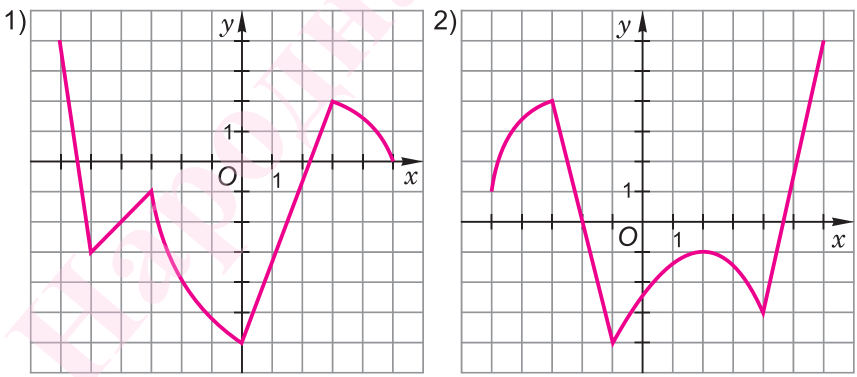


Рис. 25

1.86°. Функция задана формулой $y = (x - 2)^3$. Сравните значения y_1 и y_2 функции, если:

1) $x_1 = 0,\ x_2 = 1$; 2) $x_1 = -3,\ x_2 = -1$;
3) $x_1 = -4,\ x_2 = 2$; 4) $x_1 = -1,\ x_2 = 6$.

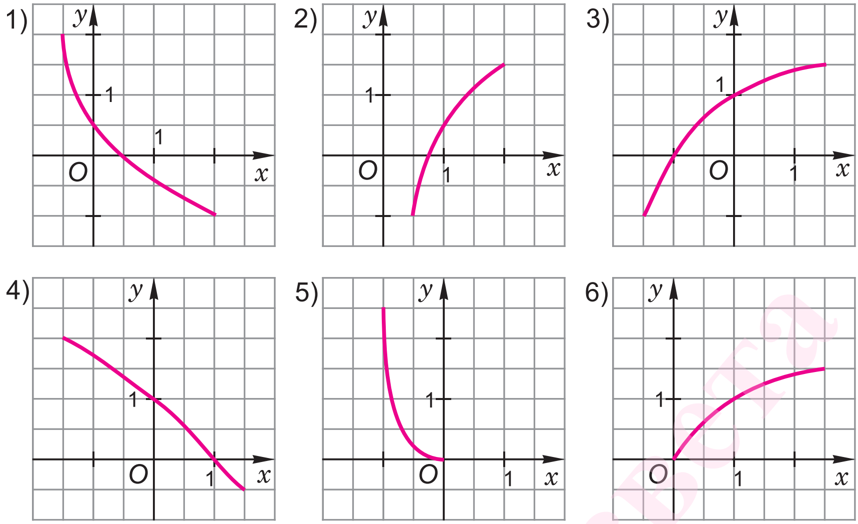


Рис. 26

1.87°. Функция задана графиком (рис. 26).

а) Укажите область определения и множество значений функции.

б) Укажите нули функции.

в) Установите, является ли функция возрастающей (убывающей) в области определения.

1.88°. Функция задана формулой $y = 2 - \sqrt{x+7}$. Сравните значения y_1 и y_2 функции, если:

1) $x_1 = 2,\ x_2 = 9;$ 2) $x_1 = -3,\ x_2 = -6;$
3) $x_1 = -6,\ x_2 = 2;$ 4) $x_1 = -7,\ x_2 = 18.$

1.89°. Функция задана формулой $y = \frac{x+1}{x-1}$ на промежутке $(-\infty;\ 1)$. Сравните значения y_1 и y_2 функции, если:

1) $x_1 = -6,\ x_2 = -4;$ 2) $x_1 = -3,\ x_2 = -1;$
3) $x_1 = -1,\ x_2 = 0{,}5;$ 4) $x_1 = -4,\ x_2 = 0.$

1.90*. Докажите, что функция, заданная формулой $y = -\frac{2}{5}(x+1)^2$ на промежутке $[-10; -3]$, возрастающая. Найдите ее нули и наибольшее значение.

1.91*. Докажите, что функция, заданная формулой $y = 4{,}5(4-3x)^2$ на промежутке $[-4;\ 1]$, убывающая. Найдите ее нули и наименьшее значение.

1.92*. Докажите, что функция, заданная формулой $y = 4x^2 - 1$ на промежутке $[0; +\infty)$, возрастающая. Найдите ее нули.

1.93*. Докажите, что функция, заданная формулой $y = -3x^2 + 2$ на промежутке $[0; +\infty)$, убывающая. Найдите ее нули.

1.94. Укажите, при каких значениях a формулой задана функция, возрастающая в области определения:

1) $y = a^4x$; 2) $y = (5a + 4)x$;
3) $y = (9 - 3a)x$; 4) $y = a^7x$.

1.95. Укажите, при каких значениях b формулой задана функция, убывающая в области определения:

1) $y = (4b - 1)x$; 2) $y = (6 - 24b)x$;
3) $y = \frac{1}{5b}x$; 4) $y = \sqrt{-b + 1}x$.

1.96. При каких значениях a функция является возрастающей в области определения:

1) $y = (a + 6)x$; 2) $y = (-3 + a)x$;
3) $y = (a^2 + 1)x$; 4) $y = (|a| - 1)x$?

1.97. При каких значениях a функция является убывающей в области определения:

1) $y = \frac{1}{a + 2}x$; 2) $y = \frac{2}{6 - a}x$;
3) $y = \frac{a^2}{2|a| - 9}x$; 4) $y = \frac{4}{\sqrt{a^2} - 2}x$?

1.98°. Верно ли, что функция, заданная следующей формулой, является возрастающей в области определения:

1) $y = 4x - 10$; 2) $y = -2x + 10$;
3) $y = -3x - 7$; 4) $y = 5x - 6$;
5) $y = -15x$; 6) $y = 18x$;
7) $y = -11 + 4x$; 8) $y = 8 - 7x$;
9) $y = \frac{13x - 4}{5}$; 10) $y = \frac{x - 6}{2}$?

1.99°. Верно ли, что функция, заданная следующей формулой, является убывающей в области определения:

1) $y = 0,2x - 3$; 2) $y = 0,3x + 8$;
3) $y = -7,1x + 5$; 4) $y = -3,9x + 25$;
5) $y = 2,5x$; 6) $y = -4,7x$;

7) $y = -4{,}9 - 5{,}2x$;
8) $y = -1{,}3 + 9{,}5x$;
9) $y = 6 - x$;
10) $y = 5x - (10x - 1)$?

1.100°. При каких значениях a функция, заданная формулой $y = ax + 3$, будет:

1) возрастающей в области определения;
2) убывающей в области определения?

1.101°. Верно ли, что функция $y = x^2$:

1) возрастающая в области определения;
2) убывающая в области определения;
3) не является возрастающей в области определения;
4) не является убывающей в области определения;
5) возрастает на промежутке [5; 13];
6) убывает на промежутке [–17; 1];
7) возрастает на промежутке [–3; 10];
8) убывает на промежутке [–29; –4]?

1.102°. Функция задана формулой $y = x^2$ на промежутке:

1) [2; 8]; 2) [3; 7]; 3) [–4; 0];
4) [–6; –1]; 5) [–2; 5]; 6) [–4; 3];
7) [–145; –21]; 8) [69; 549]; 9) [0; 49].

Является ли эта функция в своей области определения:

а) возрастающей; б) убывающей?

1.103°. Функция задана графиком (рис. 27). Укажите для нее:

а) промежутки возрастания;
б) промежутки убывания;
в) нули;
г) промежутки знакопостоянства.

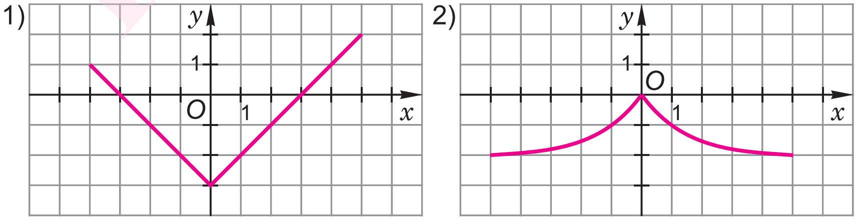


Рис. 27

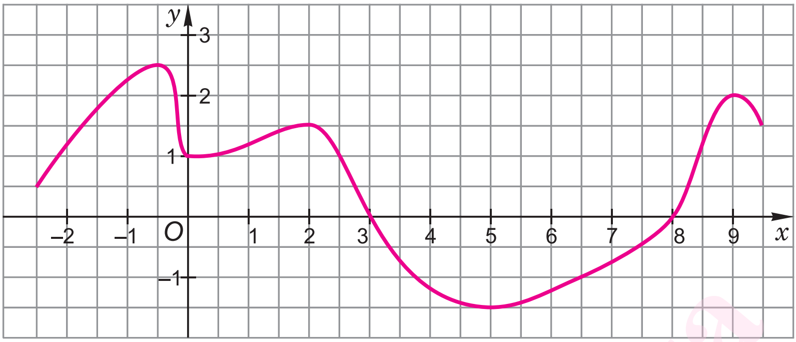


Рис. 28

1.104. Функция задана графиком (рис. 28). Заполните таблицу, перечертив ее в тетрадь.

x	–2,5	–0,5	0	2	3	5	8	9,5
y								

Назовите для функции свойства 1—7 (см. п. 1.5).

1.105. Изобразите график функции, заданной формулой на множестве D; укажите для нее свойства 1—7 (см. п. 1.5):

1) $y = \frac{1}{4}(8 - x)$, $D = [-5;\ 6]$;

2) $y = \frac{2}{3}(6 - x)$, $D = [-2;\ 8]$;

3) $y = -(-3 + x)$, $D = [-4;\ 9]$;

4) $y = -(-x - 5)$, $D = [-6;\ 4]$.

1.106. Назовите свойства 1—7 (см. п. 1.5) для функции, заданной графиком (рис. 29).

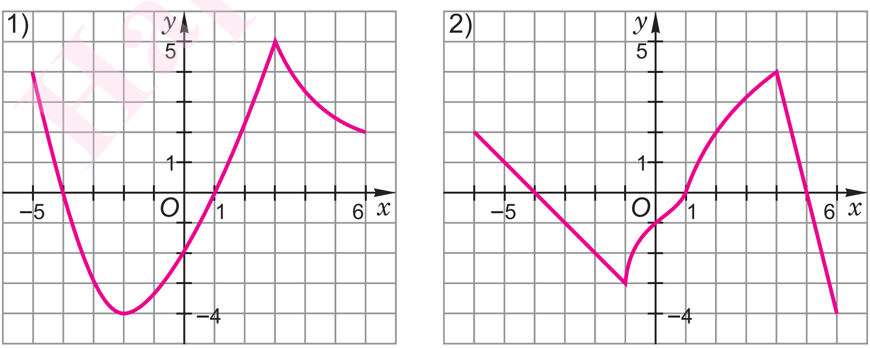


Рис. 29

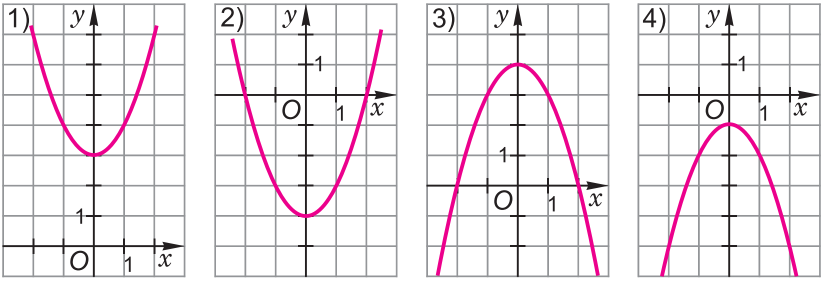


Рис. 30

1.107. Используя изображение параболы на рисунке 30, задайте формулой ее уравнение.

1.108. Для каждой функции из упражнения **1.107** укажите:

а) множество значений;
б) наибольшее (наименьшее) значение;
в) промежуток убывания;
г) промежуток возрастания;
д) координаты вершины параболы;
е) ось симметрии параболы;
ж) координаты точек пересечения графика функции с осями Ox и Oy;
з) промежутки знакопостоянства.

1.109. Изобразите график функции y и укажите для нее:

а) промежутки возрастания;
б) промежутки убывания;
в) нули,
если:

1) $y = -3x^2 - 6x - 5$;
2) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
3) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$;
4) $y = 3x^2 + 2x - 1$.

1.110. Определите нули и промежутки знакопостоянства функции:

1) $y = -3x + 15$;
2) $y = \frac{1}{2}x + 6$;
3) $y = 9 + 6x$;
4) $y = 4 - 1{,}5x$;
5) $y = 4x + 16$;
6) $y = 1{,}2x - 3$;
7) $y = 25 - 50x$;
8) $y = -18 + \frac{1}{2}x$.

1.6. Определение свойств функции по ее графику

Напомним, что частным случаем линейной функции $y = kx + b$ при *$b = 0$ является прямая пропорциональность $y = kx$.*

С графиками линейной и квадратичной функций мы уже знакомы. Используя их изображения, можно «прочитать» основные свойства этих функций.

Пример 1. Указать свойства линейной функции $y = 2x$, используя изображение ее графика (рис. 31, *а*).

Решение. 1. Как известно, *область определения линейной функции — множество **R** всех действительных чисел.*

2. *Множество значений функции $y = 2x$ — множество **R** всех действительных чисел.* Это свойство означает, что для любой точки y_1 на оси Oy найдется такая точка x_1 на оси Ox, что $y_1 = 2x_1$.

3. *Функция $y = 2x$ не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений.* Это свойство следует из свойства 2.

4. *График функции $y = 2x$ имеет единственную точку пересечения с осями координат* (0; 0) *— начало координат.*

5. *Функция имеет единственный нуль — $x = 0$.*

6. *Функция принимает отрицательные значения* ($y < 0$) *на промежутке* $(-\infty; 0)$ *и положительные значения* ($y > 0$) *на промежутке* $(0; +\infty)$.

7. *Функция является возрастающей в области определения.* (На изображении ее графика видно, что большим значениям аргумента соответствуют большие значения функции).

Заметим, что перечисленными свойствами обладает любая функция $y = kx$ при $k > 0$ (см. рис. 31, *б* и Приложение, с. 232).

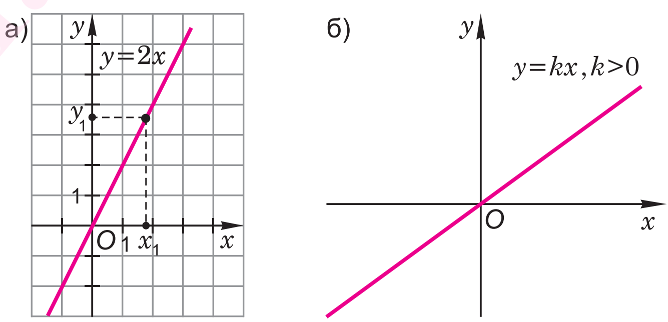


Рис. 31

Пример 2. Указать свойства линейной функции $y = -2x$, используя изображение ее графика (рис. 32, *а*).

Решение. Свойства 1—5 у линейной функции $y = -2x$ те же, что и у функции $y = 2x$ (сформулируйте их, используя рис. 32, *а*).

6. *Функция* $y = -2x$ *принимает положительные значения* ($y > 0$) *на промежутке* $(-\infty;\ 0)$ *и отрицательные значения* ($y < 0$) *на промежутке* $(0;\ +\infty)$.

7. *Функция* $y = -2x$ *является убывающей в области определения.* (На изображении ее графика видно, что большим значениям аргумента соответствуют меньшие значения функции.)

! Заметим, что перечисленными свойствами обладает любая функция $y = kx$ при $k < 0$ (см. рис. 32, *б* и Приложение, с. 232).

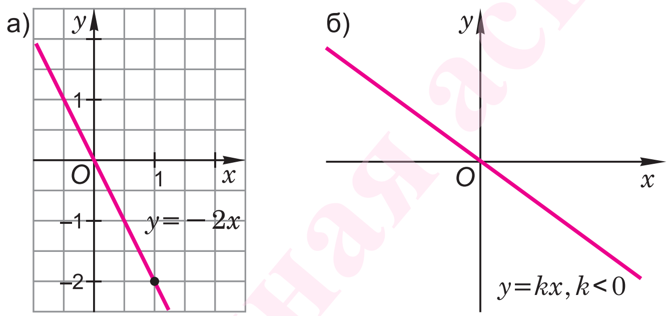


Рис. 32

Пример 3. Указать свойства функции y, используя изображение ее графика:

а) $y = 2x - 3$; б) $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Решение. Линейные функции $y = 2x - 3$ и $y = -\frac{1}{2}x + 3$, графики которых изображены на рисунках 33, 34 соответ-

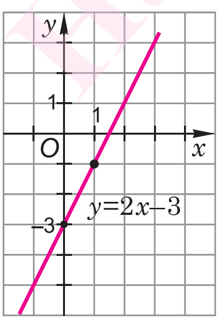


Рис. 33

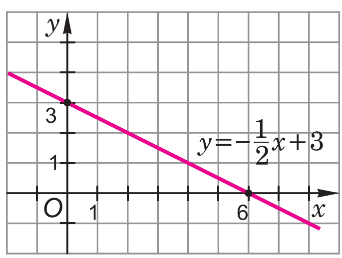


Рис. 34

ственно, обладают свойствами, подобными свойствам функций из примеров 1, 2, — сформулируйте их самостоятельно (см. Приложение, с. 233).

Пример 4. Указать свойства квадратичной функции, используя изображение ее графика:

а) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2}$; б) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{7}{2}$.

Решение. а) Преобразуем выражение, стоящее в правой части формулы, выделив в нем полный квадрат:

$$\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1 - 6) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 3.$$

Изобразим параболу $y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 3$ (рис. 35); используя это изображение, назовем свойства функции

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2}.$$

1. *Область определения квадратичной функции — множество* $\boldsymbol{R}$.

2. *Множество значений функции — промежуток* $[-3; +\infty)$.

3. *Наименьшее значение функции равно* -3, *а наибольшего значения функция не имеет.*

4. *Точки пересечения графика функции с осью* Ox: $(-1 - \sqrt{6};\ 0)$ *и* $(-1 + \sqrt{6};\ 0)$, *точка пересечения графика функции с осью* Oy: $\left(0;\ -\frac{5}{2}\right)$.

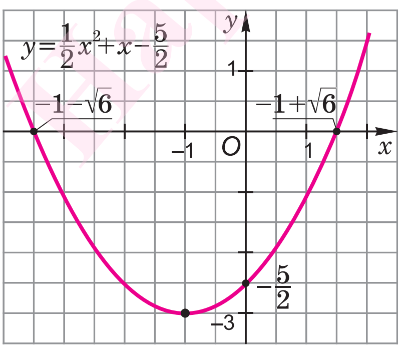


Рис. 35

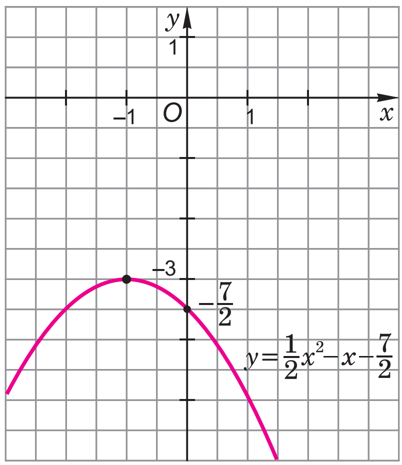


Рис. 36

5. *Нули функции*: $x_1 = -1 - \sqrt{6}$; $x_2 = -1 + \sqrt{6}$.

6. *Значения функции положительны на промежутках* $(-\infty; -1 - \sqrt{6})$ *и* $(-1 + \sqrt{6}; +\infty)$ *и отрицательны на промежутке* $(-1 - \sqrt{6}; -1 + \sqrt{6})$.

7. *Промежуток убывания функции*: $(-\infty; -1]$, *промежуток возрастания функции*: $[-1; +\infty)$.

б) Используя изображение графика функции на рисунке 36, назовите самостоятельно ее свойства (см. Приложение, с. 235).

Пример 5. Указать свойства функции, заданной графиком (рис. 37).

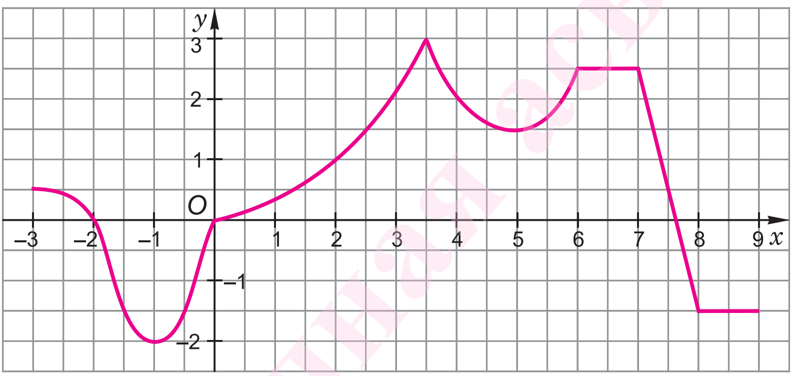


Рис. 37

Решение.

1. *Область определения функции — промежуток* $[-3; 9]$.

2. *Множество значений функции — промежуток* $[-2; 3]$.

3. *Наибольшее значение функции равно* 3, *а наименьшее значение функции равно* -2.

4. *С осью Ox график функции пересекается в трех точках*: $(-2; 0)$, $(0; 0)$, $(7{,}6; 0)$. *Точка пересечения графика с осью Oy* — $(0; 0)$.

5. *Нули функции*: $x_1 = -2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 7{,}6$.

6. *Значения функции отрицательны на промежутках* $(-2; 0)$ *и* $(7{,}6; 9]$ *и положительны на промежутках* $[-3; -2)$ *и* $(0; 7{,}6)$.

7. *Промежутки возрастания функции*: [–1; 3,5] *и* [5; 6]; *промежутки убывания функции*: [–3; –1], [3,5; 5] *и* [7; 8]. *На промежутках* [6; 7] *и* [8; 9] *значения функции постоянны.*

?

1. Назовите свойства функции $y = kx + b$, используя изображение ее графика, если:

   а) $k > 0$; б) $k < 0$; в) $k = 0$.

2. Назовите свойства функции $y = ax^2$, используя схематичное изображение ее графика, если:

   а) $a > 0$; б) $a < 0$.

Упражнения

1.111°. По изображению графика квадратичной функции (рис. 38) укажите ее свойства.

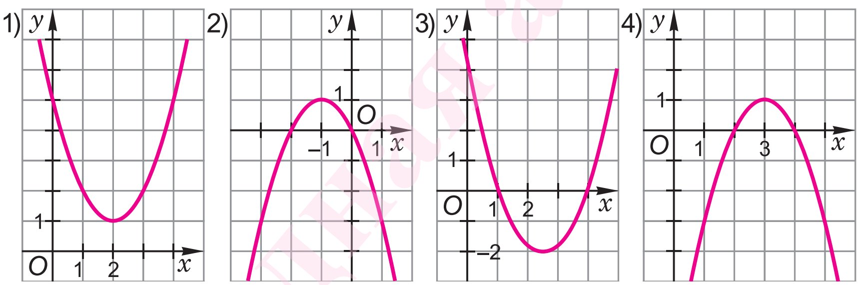
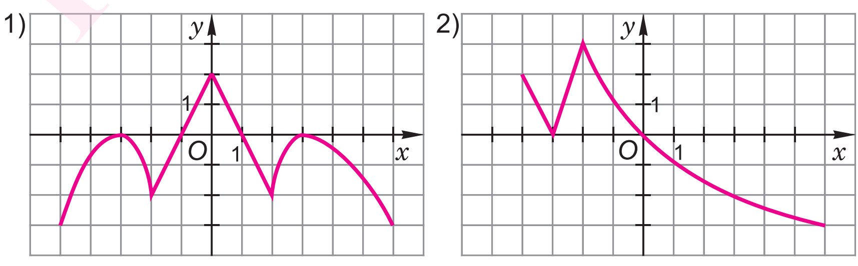


Рис. 38

1.112. Задайте формулой квадратичную функцию, график которой изображен на рисунке 38.

1.113. Укажите свойства функции, заданной графиком (рис. 39).



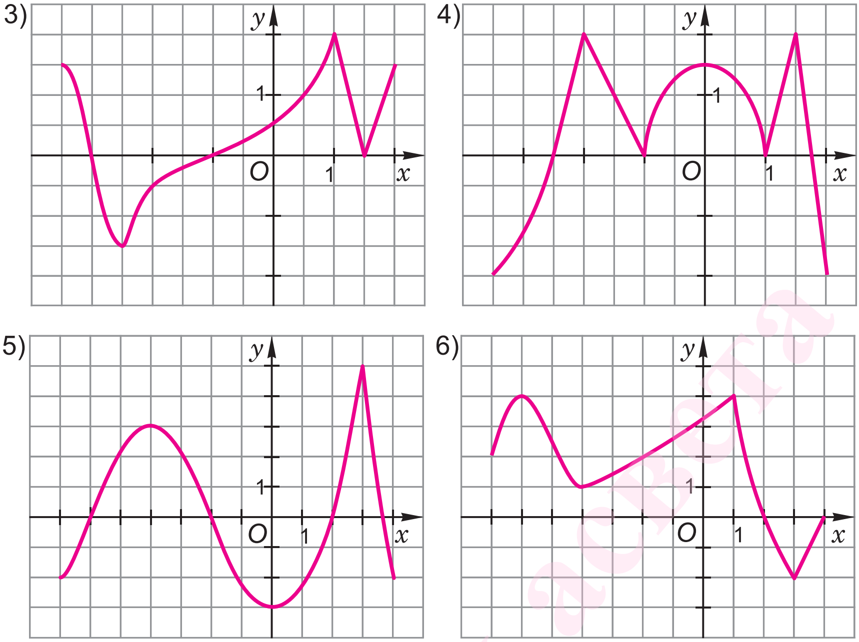


Рис. 39

1.114. Изобразите график функции $y = kx + b$ и укажите ее свойства, если известно, что ее график проходит через точку $B(-4;\ 2)$ и параллелен графику функции $y = 5x + 2$.

1.115. Изобразите график функции $y = kx + b$ и укажите ее свойства, если известно, что ее график проходит через точку $C(-4; -1)$ и параллелен графику функции $y = -3x$.

1.116. Изобразите график функции, заданной формулой, и укажите ее свойства:

1) $y = \frac{1}{4}(x+2)^2$; 2) $y = \frac{1}{4}(x-2)^2$;

3) $y = -5(x+1)^2$; 4) $y = -5(1-x)^2$.

1.117. Изобразите график функции, заданной формулой на множестве D, и укажите ее свойства:

1) $y = \left(\sqrt{x^2+2}\right)^2 - 2,\ D = [-2;\ 3]$;

2) $y = \sqrt{x^4},\ D = [-3;\ 0]$;

3) $y = \frac{x^3}{|x^3|} + x^2 + 1$, $D = [-4; -1]$;

4) $y = x\sqrt{x^2}$, $D = (-\infty; 0)$.

1.118. Изобразите график функции и укажите ее свойства:

1) $y = x^2 + 6x - 4$;
2) $y = x^2 - 4x + 3$;
3) $y = 3x^2 - 10x + 7$;
4) $y = -2x^2 - 3x + 5$;
5) $y = -4x^2 + 5$;
6) $y = -3x^2 - 6$;
7) $y = -4x^2 + 4x - 1$;
8) $y = 4x^2 + 4x - 3$.

1.119. Изобразите график функции, заданной формулой на множестве D, и укажите ее свойства:

1) $y = (x - 5)(x + 2) + 3x + 10$, $D = [-1; 2]$;
2) $y = 7 + (x + 7)(x - 1) - 6x$, $D = [-3; 1]$;
3) $y = \sqrt{(x^2 + 3)^2} - 3$, $D = [0; 2]$;
4) $y = \sqrt{(10 + x^2)^2} - 10$, $D = [-3; 0]$;
5) $y = \frac{x^4 - 16}{x^2 + 4} + 4$, $D = [-2; 0]$;
6) $y = \frac{x^4 + 25 + 10x^2}{5 + x^2} - 5$, $D = [-4; 0]$.

1.120. Изобразите график функции и укажите ее свойства:

1) $y = 5x - x(5 - x)$;
2) $y = (x - 9)(x + 9) + 81$;
3) $y = (x + 3)^2 - 6x - 9$;
4) $y = (x + 1)^2 - 2(x + 2) + 3$.

1.121*. Изобразите график какой-нибудь функции, которая:

1) определена на множестве $D = [-3; 4]$, является возрастающей и принимает только отрицательные значения;
2) определена на множестве $D = [-5; 2]$, является убывающей и принимает только положительные значения;
3) определена на множестве $D = [-7; 3]$, возрастает на каждом из промежутков $[-7; 1)$ и $[1; 3]$ и не является возрастающей на D;
4) определена на множестве $D = [-4; 3]$, убывает на каждом из промежутков $[-4; -1]$ и $(-1; 3]$ и является убывающей на D.

1.7. Функция $y = \sqrt{x}$

Рассмотрим формулу $y = \sqrt{x}$.

Выражение $\sqrt{x}$ имеет смысл только при неотрицательных значениях переменной x, его естественной областью определения является промежуток $[0; +\infty)$. Для любого x из этого промежутка существует, и притом единственное, значение арифметического квадратного корня — это число $\sqrt{x}$.

Таким образом, формула $y = \sqrt{x}$ задает функцию на промежутке $[0; +\infty)$.

Чтобы изобразить график функции $y = \sqrt{x}$, придадим несколько значений аргументу x и, вычислив (приближенно) соответствующие значения функции с помощью калькулятора или таблицы квадратных корней, заполним таблицу:

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
y	0	0,7	1	1,2	1,4	1,6	1,7	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4

Изобразим точки $(x; y)$ с указанными координатами на плоскости (рис. 40), соединим эти точки плавной непрерывной кривой (рис. 41). Эту кривую можно рассматривать как изображение графика функции $y = \sqrt{x}$.

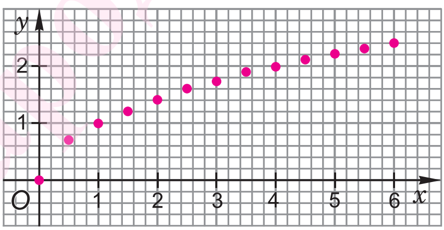


Рис. 40

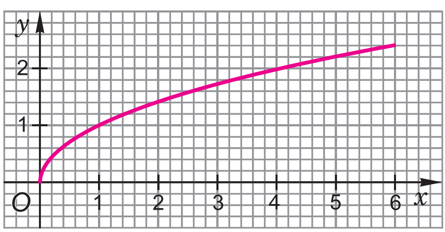


Рис. 41

Теорема (*о свойствах функции* $y = \sqrt{x}$).

1. Областью определения функции $y = \sqrt{x}$ является множество $[0; +\infty)$.

2. Множеством значений функции $y = \sqrt{x}$ является множество $[0; +\infty)$.

3. Значение функции $y = 0$ является наименьшим, а наибольшего значения функция $y = \sqrt{x}$ не имеет.

4. График функции $y = \sqrt{x}$ имеет с осями координат единственную общую точку (0; 0) — начало координат.

5. Значение аргумента $x = 0$ является нулем функции $y = \sqrt{x}$.

6. Функция $y = \sqrt{x}$ принимает положительные значения ($y > 0$) на промежутке $(0; +\infty)$, т. е. ее график расположен в I координатном угле.

7. Функция $y = \sqrt{x}$ возрастающая в области определения.

Изображение графика функции $y = \sqrt{x}$ позволяет «прочитать» свойства, указанные в теореме.

Множество значений функции $y = \sqrt{x}$ — это проекция ее графика на ось Oy. На рисунке 41 видно, что эта проекция есть промежуток $[0; +\infty)$ на оси Oy (свойство 2). Таким образом, для любой точки y_1 на оси Oy, расположенной в верхней полуплоскости, найдется такая точка x_1 на оси Ox, что $y_1 = \sqrt{x_1}$ (рис. 42).

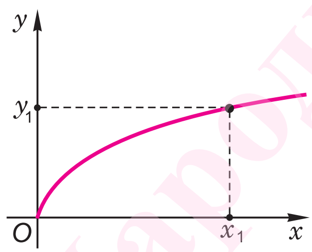


Рис. 42

На рисунке 41 видно, что график имеет единственную общую точку с осями координат — начало координат, а остальные его точки лежат над осью абсцисс. Таким образом, точка $x = 0$ является единственным нулем функции, а на промежутке $(0; +\infty)$ функция $y = \sqrt{x}$ принимает только положительные значения (свойства 4—6).

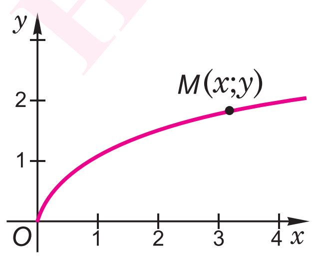


Рис. 43

Представим себе, что точка $M(x; y)$ (рис. 43) движется по графику функции $y = \sqrt{x}$ так, что ее абсцисса x

увеличивается, т. е. точка движется слева направо. Очевидно, что при таком движении точки M ордината y также будет увеличиваться; значит, функция $y=\sqrt{x}$ возрастающая (свойство 7).

▲ Приведем доказательства свойств, не опирающиеся на изображение графика функции.

Доказательство свойств 2 и 3. По определению арифметического квадратного корня его значения являются неотрицательными числами. Поэтому функция $y=\sqrt{x}$ может принимать только неотрицательные значения, т. е. только значения из промежутка $[0;+\infty)$; значит, число 0 — наименьшее значение.

Покажем, что y может принять любое значение b из этого промежутка при соответствующем значении аргумента.

Чтобы найти это значение аргумента, надо решить уравнение

$$b=\sqrt{x}.$$

Корнем данного уравнения является число b^2. При этом значении аргумента значение функции равно b. ☒

Доказательство свойств 4, 5. Подставив в формулу $y=\sqrt{x}$ соответствующие значения переменной x, получим нужные утверждения (убедитесь в этом).

Свойство 6 следует из свойств 2, 4 и 5.

Доказательство свойства 7. Когда увеличиваются значения переменной x, то увеличиваются и значения $\sqrt{x}$. В самом деле, пусть числа x_1, x_2 принадлежат промежутку $[0;\ +\infty)$, причем $x_2>x_1$, и $y_1=\sqrt{x_1}$, $y_2=\sqrt{x_2}$. Сравним y_2 и y_1. Рассмотрим разность y_2-y_1 и определим ее знак:

$$y_2-y_1=\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=\frac{\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)\left(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}\right)}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x_2}\right)^2-\left(\sqrt{x_1}\right)^2}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}.$$

В этой дроби числитель x_2-x_1 — положительное число, так как $x_2>x_1$. Знаменатель дроби $\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}$ — положительное число, поскольку $\sqrt{x_1}\geqslant 0$, $\sqrt{x_2}>0$ (поясните, почему первое неравенство нестрогое, а второе — строгое). Следовательно, дробь $\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$ — положительное число, т. е. разность $y_2 - y_1$ — положительное число. Значит, $y_2 > y_1$, т. е. функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. ☒ ▲

?

1. Изобразите график функции $y = \sqrt{x}$.
2. Сформулируйте теорему о свойствах функции $y = \sqrt{x}$.
3. Как на изображении графика функции $y = \sqrt{x}$ отражаются ее свойства?
4*. Докажите свойства функции $y = \sqrt{x}$.

Упражнения

1.122°. Составьте формулу зависимости площади поверхности куба S от длины его ребра a. Найдите длину ребра куба, зная, что площадь его поверхности равна 36 см^2; 96 см^2; 150 см^2; 30 м^2.

1.123°. Составьте формулу зависимости радиуса круга r от его площади S. Найдите радиус круга, если площадь круга равна 25π см^2; 64π см^2; $0{,}01\pi$ см^2; 90π м^2.

1.124°. Используя график функции $y = \sqrt{x}$ (см. рис. 41), найдите приближенное значение функции, если значение аргумента равно 1,2; 3,6; 4,9; 0,1; 1,8; 2,5; 3,9.

1.125°. Используя график функции $y = \sqrt{x}$ (см. рис. 41), найдите приближенное значение аргумента, если значение функции равно 0,6; 1,5; 1,8; 0,7; 2,2; 2,4.

1.126°. Функция задана формулой $y = \sqrt{x}$. При каком значении функции значение аргумента равно 4; 25; 49; 100; 625; 10 000; 0,64; 0,81; $\frac{4}{9}$; 2,25; 2,89; $\frac{49}{121}$?

1.127°. Функция задана формулой $y = \sqrt{x}$. При каком значении аргумента значение функции равно 9; 14; 19; 0,1; 1,5; 4,7; 23; $\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{3}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{3}{8}$?

1.128°. Принадлежит ли графику функции $y = \sqrt{x}$ точка:

1) $A(25; 5)$; 2) $B(49; -7)$;
3) $C(0{,}25; 0{,}5)$; 4) $D(100; 10)$;
5) $M(-16; -4)$; 6) $T(10\,000; 100)$;
7) $E(-9; 3)$; 8) $K(-4; 4)$;

9) $O(0;\ 0)$; 10) $P(1;\ 1)$;
11) $F(-1;\ -1)$; 12) $Q(12;\ 144)$?

1.129°. Пересекаются ли графики функции $y=\sqrt{x}$ и постоянной функции:

1) $y = 3{,}4$; 2) $y = 0{,}2$;
3) $y = -2{,}9$; 4) $y = 2{,}5$;
5) $y = 0$; 6) $y = -3$?

1.130°. Функция задана формулой $y=\sqrt{x}$. Сравните значения функции, соответствующие значениям аргумента:

1) 5 и 6; 2) 8 и 10;
3) 0,2 и 0,1; 4) 0,3 и 0,4;
5) 6,2 и 6,3; 6) 9,5 и 10;
7) 91,2 и 90,2; 8) 145,7 и 142,9.

1.131°. Изобразите график функции, заданной формулой $y=\sqrt{x}$ на множестве D, если:

1) $D = \boldsymbol{N}$; 2) $D = \{0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8\}$;
3) $D = \{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$; 4) $D = \boldsymbol{Z}$;
5) $D = [0;\ 1]$; 6) $D = [1;\ 4]$;
7) $D = [0;\ 1) \cup (1;\ 4]$; 8) $D = [1;\ 4) \cup (4;\ 9]$.

1.132°. Укажите свойства функции и изобразите ее график, если она задана формулой на множестве D:

1) $y = \left(\sqrt{x}+1\right)^2 - (x+1) - \sqrt{x}$, $D = [1;\ 9]$;

2) $y = 5\sqrt{x} + \left(\sqrt{x}-2\right)^2 - (x+4)$, $D = [0;\ 16]$;

3) $y = \dfrac{\sqrt{81x}}{6+|-3|}$, $D = [4;\ 16]$;

4) $y = \dfrac{\sqrt{121x}}{\sqrt{169}-|-2|}$, $D = [1;\ 16]$.

1.133. Может ли функция, заданная формулой $y=\sqrt{x}$, принимать значение, равное:

1) 344; 2) 127;
3) m^3, если $m < 0$; 4) $4m^4$, если $m < 0$;
5) $-p^{15}$, если $p = -(136{,}7)^0$; 6) p^{18}, если $p = (-263{,}4)^0$?

1.134*. Найдите значение a, при котором графику функции $y=\sqrt{x}$ принадлежит точка:

1) $M(a-3;\ 4)$;
2) $M(a+6;\ 5)$;
3) $M(a^2+3a;\ 2)$;
4) $M(a^2+6a;\ 4)$;
5) $M(2a^2+a+3;\ a+5)$;
6) $M(2a^2-7a+5;\ a-1)$;
7) $M(4+2a-a^2;\ 2-a)$;
8) $M(6-4a-a^2;\ -a-4)$.

1.135*. При каком значении a формулой будет задана функция $y=\sqrt{x}$:

1) $y=(a^2-a-5)\sqrt{x}$;
2) $y=\sqrt{(7a-a^2-9)x}$;
3) $y=\sqrt{(5-a^2)x}$;
4) $y=(a^4-15)\sqrt{x}$;
5) $y=\sqrt{\dfrac{a^2-4}{a-2}x}$;
6) $y=\dfrac{a+6}{a+6}\sqrt{x}$;
7) $y=(a^3-7)\sqrt{x}$;
8) $y=\sqrt{\dfrac{(a^3+27)x}{a^2-3a+9}}$?

1.8. Функция $y=x^3$

Рассмотрим функцию $y=x^3$.

Областью определения этой функции является естественная область определения выражения x^3, т. е. множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел, поскольку для любого значения независимой переменной x существует, и притом единственное, значение выражения x^3.

Чтобы изобразить график функции $y=x^3$, придадим несколько значений аргументу и, вычислив (приближенно) соответствующие значения функции, заполним таблицу:

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	–8	–3,4	–1	–0,1	0	0,1	1	3,4	8

Изобразим точки $(x;\ y)$ с указанными координатами на плоскости (рис. 44), соединим эти точки плавной непрерывной кривой (рис. 45). Эту кривую можно рассматривать как изображение графика функции $y=x^3$.

График функции $y=x^3$ называется ***кубической параболой***.

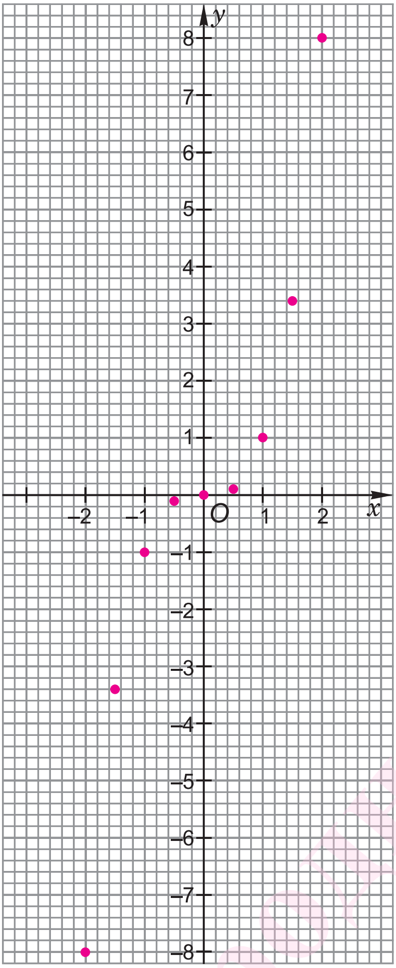


Рис. 44

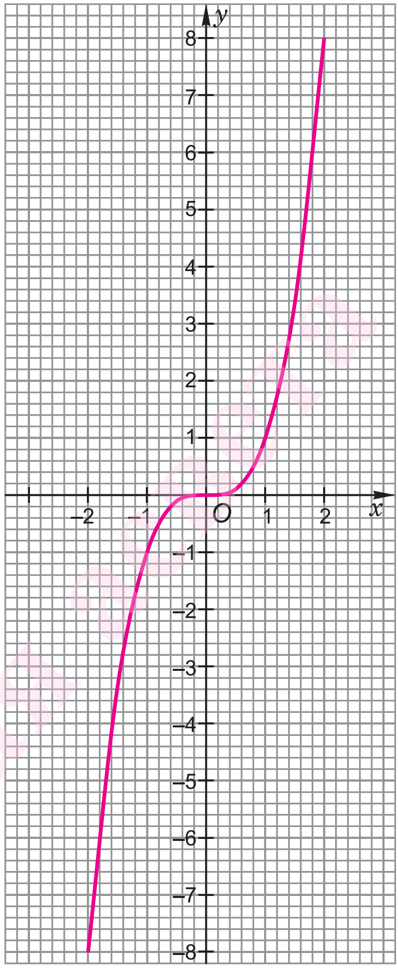


Рис. 45

Теорема (*о свойствах функции* $y = x^3$).

1. Областью определения функции $y = x^3$ является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2. Множеством значений функции $y = x^3$ является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

3. Функция $y = x^3$ наименьшего и наибольшего значений не имеет.

4. Кубическая парабола пересекает оси координат в единственной точке (0; 0) — начале координат.

5. Значение аргумента $x = 0$ является нулем функции $y = x^3$.

6. Функция $y = x^3$ принимает отрицательные значения ($y < 0$) на промежутке $(-\infty;\ 0)$ и положительные значения ($y > 0$) на промежутке $(0;\ +\infty)$, т. е. кубическая парабола расположена в I и III координатных углах.

7. Функция $y = x^3$ возрастающая в области определения.

Все эти свойства функции $y = x^3$ легко «прочитать», используя изображение ее графика, аналогично тому, как это сделано для функции $y = \sqrt{x}$.

Заметим еще, что график функции $y = x^3$ симметричен относительно начала координат.

▲ Не опираясь на изображение графика, можно доказать свойства 2—7.

Докажем, что функция $y = x^3$ не имеет наибольшего значения (свойство 3). При любом a имеем: $a^3 < (a + 1)^3$. Следовательно, при любом a число a^3 не является наибольшим значением функции $y = x^3$. ☒

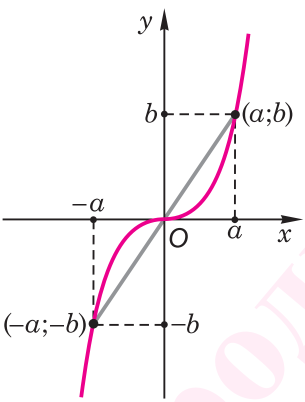


Рис. 46

Свойства 4—7 докажите самостоятельно.

Докажем симметричность графика функции $y = x^3$ относительно начала координат. Действительно, если точка $(a;\ b)$ принадлежит кубической параболе $y = x^3$, т. е. $b = a^3$, то и точка $(-a;\ -b)$ принадлежит этой кубической параболе, так как $-b = (-a)^3$ (рис. 46).

Точки $(a;\ b)$ и $(-a;\ -b)$ симметричны относительно начала координат. Значит, каждая точка кубической параболы $y = x^3$ имеет на ней симметричную относительно начала координат точку. Другими словами, кубическая парабола симметрична относительно начала координат. ☒ ▲

?

1. Как называется график функции $y = x^3$? Изобразите его.

2. Сформулируйте теорему о свойствах функции $y = x^3$.

3. Как на изображении графика функции $y = x^3$ отражаются ее свойства?

4*. Докажите свойства функции $y = x^3$.

Упражнения

1.136°. Используя изображение графика функции $y = x^3$ (см. рис. 45), найдите приближенное значение:

1) y, если x равно –1,7; –1,6; –1,2; 0; 1,4; 1,5;
2) x, если y равно –5; –3,5; –1,4; 0; 1,6; 2,8; 3,6.

1.137°. Используя изображение графика функции $y = x^3$ (см. рис. 45), сравните:

1) $0{,}8^3$ и 1; 2) –1 и $(-1{,}1)^3$;
3) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$ и $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$; 4) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$ и $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$;
5) $(-1{,}7)^3$ и $(-1{,}3)^3$; 6) $(-1)^3$ и $(-1{,}5)^3$.

1.138. Используя свойства функции $y = x^3$, расположите в порядке возрастания числа $(-1{,}3)^3$; $0{,}4^3$; $(-1{,}6)^3$; $0{,}52^3$; $(-1{,}5)^3$; $0{,}3^3$; $1{,}2^3$.

1.139°. Принадлежит ли графику функции $y = x^3$ точка:

1) $A(1;\ 1)$; 2) $B(-2;\ 8)$; 3) $C(-3;\ -27)$;
4) $D(5;\ 125)$; 5) $M(-4;\ 64)$; 6) $N(6;\ 216)$?

1.140. Укажите какое-нибудь значение аргумента, при котором значение функции $y = x^3$ больше каждого из чисел: –2; –1; 0; 1; 2; 3.

1.141. Укажите какое-нибудь значение аргумента, при котором значение функции $y = x^3$ меньше каждого из чисел: 4; 3; 1; 0; –3; –4.

1.142. Оцените значение выражения x^3, если:

1) $1 \leqslant x < 2{,}5$; 2) $-1 < x \leqslant 2$;
3) $-2 \leqslant x \leqslant 0$; 4) $0 < x < 3$.

1.143. Точка $Q(m;\ n)$ принадлежит графику функции $y = x^3$. Принадлежит ли графику этой функции точка:

1) $A(-m;\ -n)$; 2) $B(-m;\ n)$;
3) $C(m;\ -n)$; 4) $D(n;\ m)$;
5) $P(3m;\ 27n)$; 6) $M\left(-\frac{1}{4}m;\ -\frac{1}{64}n\right)$;
7) $K(0{,}1m;\ 0{,}001n)$; 8) $T\left(-1\frac{1}{2}m;\ -3\frac{3}{8}n\right)$?

1.144. Укажите свойства функции и изобразите ее график, если функция задана формулой на множестве D:

1) $y = (x-1)(x^2+x+1)+(-14)^0$, $D = [-2;\ 2]$;
2) $y = (x+3)(x^2-3x+9)-3^3$, $D = [0;\ 2]$;
3) $y = (x-1)^3+3(x+1)(x-2)+7$, $D = [-1;\ 2]$;
4) $y = (x+2)^3-6(x+3)(x+1)+2(6x+5)$, $D = [-3;\ 1]$.

1.145. При каком значении a графику функции $y = x^3$ принадлежит точка:

1) $K(2a+1;\ 8a^3+18a+1)$;
2) $K(a-2;\ a^3+3a^2+11a-18)$;
3) $K(a-1;\ a^3-4a^2+3a)$;
4) $K(3-2a;\ 11-6a-8a^3)$?

1.9. Функция $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$

Время t, которое необходимо, чтобы преодолеть определенный участок пути s, двигаясь со скоростью v, вычисляется по формуле $t = \frac{s}{v}$. Таким образом, во сколько раз увеличивается скорость v, во столько раз уменьшается время t. Мы знаем, что такая зависимость между скоростью и временем называется *обратно пропорциональной*.

Определение. ***Обратной пропорциональностью*** **называется функция вида**

$$y = \frac{k}{x},$$

где k — число, $k \neq 0$.

Переменная y называется ***обратно пропорциональной переменной x***, а число k — ***коэффициентом обратной пропорциональности***.

Так как область определения функции не указана, то это естественная область определения выражения $\frac{k}{x}$, т. е. все действительные числа, кроме $x = 0$. Для любого значения независимой переменной $x \neq 0$ существует, и притом единственное, значение выражения $\frac{k}{x}$.

Теорема 1. Если переменная y обратно пропорциональна переменной x с коэффициентом k, то переменная x обратно пропорциональна переменной y с тем же коэффициентом k.

▲ Доказательство. Переменная y обратно пропорциональна переменной x с коэффициентом k, т. е. $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$. Тогда

$$xy = k \ (k \neq 0).$$

Значит, $y \neq 0$ и, следовательно,

$$x = \frac{k}{y} \ (k \neq 0).$$

А это означает, что переменная x обратно пропорциональна переменной y с коэффициентом k. ☒ ▲

Замечание. Доказанная теорема позволяет говорить, что переменные x и y (или y и x) обратно пропорциональны.

Рассмотрим функцию $y = \frac{3}{x}$ с областью определения $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Чтобы получить представление о ее графике, поступим как обычно: придадим несколько значений аргументу и вычислим соответствующие значения функции. Сделаем это сначала для положительных значений x и запишем результаты в таблицу:

x	0,5	1	2	3	4	5	6
y	6	3	1,5	1	0,75	0,6	0,5

Изобразим точки $(x; y)$ с указанными координатами на плоскости (рис. 47). Соединим эти точки плавной непрерывной кривой (рис. 48). Эту кривую можно рассматривать как изображение графика функции $y = \frac{3}{x}$ при положительных значениях x.

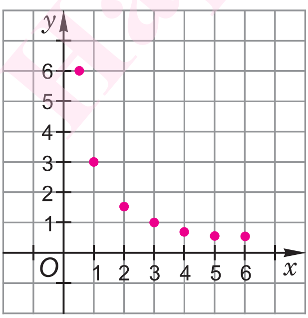


Рис. 47

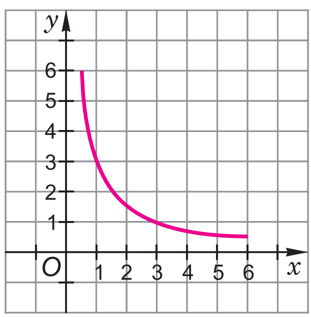


Рис. 48

Придадим аргументу несколько отрицательных значений и составим таблицу соответствующих значений x и y:

x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	–0,5
y	–0,5	–0,6	–0,75	–1	–1,5	–3	–6

Изобразим график функции $y = \frac{3}{x}$ при отрицательных значениях x (рис. 49).

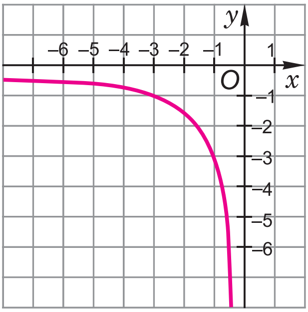


Рис. 49

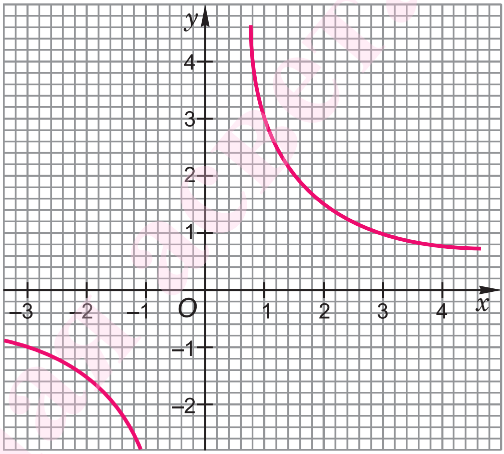


Рис. 50

Объединяя на одном рисунке изображения графиков функции $y = \frac{3}{x}$ при положительных и отрицательных значениях аргумента, получаем изображение графика этой функции (рис. 50).

Таким образом, график функции $y = \frac{3}{x}$ представляет собой кривую, состоящую из двух ветвей, расположенных в I и III координатных углах.

Если тем же способом изобразить графики функций $y = \frac{k}{x}$ при $k = \frac{1}{3}$, $k = 1$, $k = 6$, то легко убедиться, что каждый раз будет получаться похожая кривая, состоящая из двух ветвей, расположенных в I и III координатных углах (рис. 51).

Изображения графиков функций $y = \frac{k}{x}$ при $k = -\frac{1}{3}$, $k = -1$, $k = -6$ будут расположены во II и IV координатных углах (рис. 52).

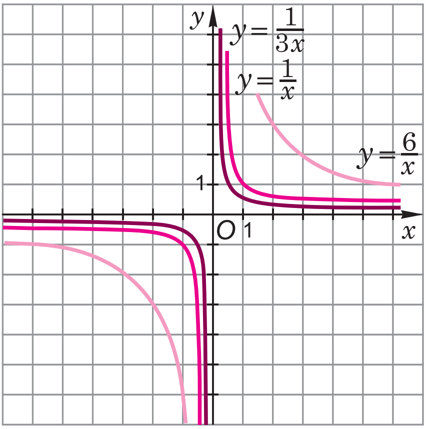


Рис. 51

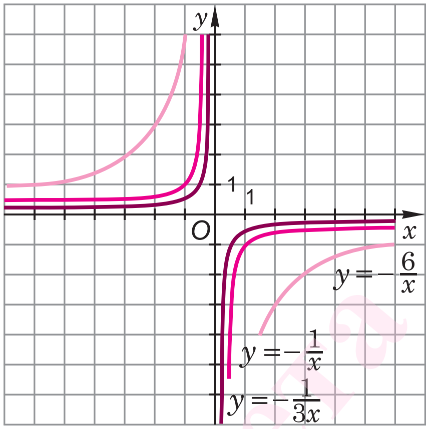


Рис. 52

Кривая, являющаяся графиком функции $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, называется ***гиперболой***.

Теорема 2 (*о свойствах функции* $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$).

1. Областью определения функции $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ является множество всех действительных чисел, кроме $x=0$ (т. е. $x \neq 0$).

2. Множеством значений функции $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ является множество всех действительных чисел, кроме $y=0$ (т. е. $y \neq 0$).

3. Наименьшего и наибольшего значений функция $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ не имеет.

4. Гипербола $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ не пересекает координатных осей.

5. Функция $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ не имеет нулей.

6. Функция $y=\frac{k}{x}$ $(k > 0)$ принимает отрицательные значения $(y < 0)$ на промежутке $(-\infty;\ 0)$ и положительные значения $(y > 0)$ на промежутке $(0;\ +\infty)$, т. е. ветви гиперболы располагаются в I и III координатных углах.

Функция $y=\frac{k}{x}$ $(k < 0)$ принимает отрицательные значения $(y < 0)$ при $x \in (0;\ +\infty)$ и положительные значения

($y > 0$) при $x \in (-\infty;\ 0)$, т. е. ветви гиперболы размещаются во II и IV координатных углах.

7. Функция $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$ является убывающей.

Функция $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$ является возрастающей.

Изображение гиперболы позволяет наглядно представить эти свойства. На рисунке 53, где изображена гипербола $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$), видно, что она не пересекает осей координат, одна ветвь гиперболы лежит в I координатном угле, а другая — в III (свойства 4, 5, 6).

Множество значений функции $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) — это проекция гиперболы на ось Oy. На рисунке 53 видно, что эта проекция есть вся ось без начала координат (свойство 2), т. е. для любой точки $y_1 \neq 0$ на оси Oy найдется такая точка x_1 на оси Ox, что $y_1 = \frac{k}{x_1}$.

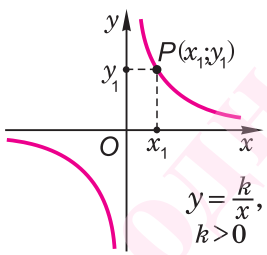


Рис. 53

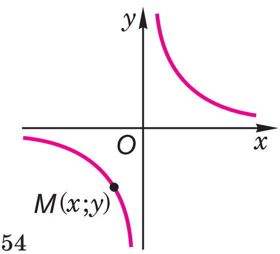


Рис. 54

Рассмотрим гиперболу $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) на промежутке $(-\infty;\ 0)$ (рис. 54). Представим себе, что точка $M(x;\ y)$ движется по ней так, что абсцисса x увеличивается, т. е. точка движется слева направо. Очевидно, что при таком движении ордината y будет уменьшаться, точка M будет как бы «скатываться» по гиперболе вниз.

Таким образом, при значениях x из промежутка $(-\infty;\ 0)$ большему значению x соответствует меньшее значение y. Другими словами, функция $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) убывает на промежутке $(-\infty;\ 0)$, что и отмечено в свойстве 7; на этом промежутке значения y изменяются (убывают) от 0 до $-\infty$.

Рассмотрим теперь гиперболу $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$ на промежутке $(0; +\infty)$ (рис. 55). Представим себе, что точка $M(x; y)$ движется по ней так, что абсцисса x увеличивается, т. е. точка движется опять-таки слева направо. Очевидно, что при таком движении ордината y будет уменьшаться, точка M и здесь будет как бы «скатываться» по гиперболе вниз.

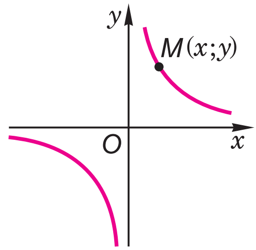


Рис. 55

Таким образом, при значениях x из промежутка $(0; +\infty)$ большему значению x соответствует меньшее значение y. Другими словами, функция $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$ убывает на промежутке $(0; +\infty)$, это также отмечено в свойстве 7; на этом промежутке значения y изменяются (убывают) от $+\infty$ до 0.

▲ Приведем доказательства свойств, не опирающиеся на изображение графика функции $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$. Аналогично они обосновываются и при $k < 0$.

Доказательство свойства 2. Функция $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ может принимать только значения, не равные нулю. Покажем, что она может принять любое значение $p \neq 0$ при соответствующем значении аргумента. Чтобы найти это значение аргумента, надо решить уравнение $p = \frac{k}{x}$. Корнем этого уравнения является число $\frac{k}{p}$. При этом значении аргумента значение функции равно p. ☒

Свойство 3 непосредственно следует из свойства 2.

Свойства 4, 5 являются следствиями из свойств 1 и 2.

Доказательство свойства 6. Так как для точки $(x; y)$ на гиперболе $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$ имеем $xy = k > 0$, то значения x и y — это числа одного знака, т. е. точка $(x; y)$ лежит в I или III координатном угле. ☒

Доказательство свойства 7. Докажем, что функция $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$. Пусть x_1, $x_2 \in (-\infty; 0)$, т. е. x_1 и x_2 — отрицательные числа, и пусть $x_2 > x_1$.

Рассмотрим разность $y_2 - y_1$ и определим ее знак:

$$y_2 - y_1 = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{kx_1 - kx_2}{x_1x_2} = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_1x_2}.$$

Так как $x_2 > x_1$, то $x_1 < x_2$ и, значит, $x_1 - x_2 < 0$. Кроме того, x_1 и x_2 — отрицательные числа, поэтому их произведение положительно. По условию $k > 0$, значит, разность $y_2 - y_1 = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_1x_2}$ — отрицательное число. Следовательно, $y_2 < y_1$.

Итак, для любых x_1 и x_2, принадлежащих промежутку $(-\infty; 0)$, если $x_2 > x_1$, то $y_2 < y_1$. А это как раз и означает, что функция $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$. ☒

Убывание этой функции на промежутке $(0; +\infty)$ доказывается аналогично. (Сделайте это самостоятельно.)

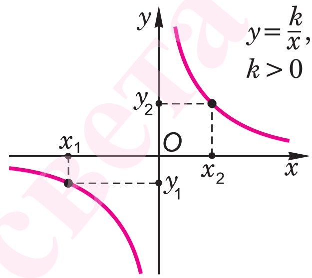


Рис. 56

! Заметим, что функция $y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$ — убывающая на промежутке $(-\infty; 0)$ и убывающая на промежутке $(0; +\infty)$. Однако нельзя сказать, что она убывающая на всей области определения. На рисунке 56 $x_2 > x_1$ и в то же время $y_2 > y_1$.

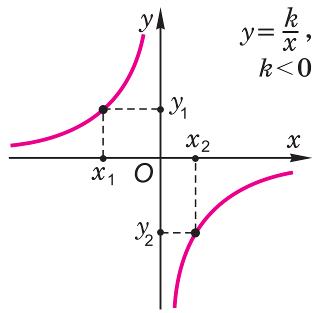


Рис. 57

По рисунку 57 поясните, почему функцию $y = \frac{k}{x}$ $(k < 0)$ нельзя назвать возрастающей на всей области определения.

Поясните, как на рисунке 58 отражается свойство 2 функции $y = \frac{k}{x}$ $(k < 0)$.

Заметим еще, что график функции $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ симметричен относительно начала координат.

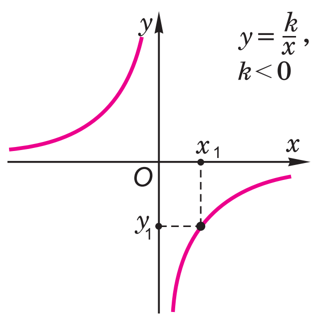


Рис. 58

▲ Используя рисунок 59, докажите симметричность гиперболы относительно начала координат самостоятельно, аналогично тому, как это сделано для функции $y = x^3$ (см. с. 58). ▲

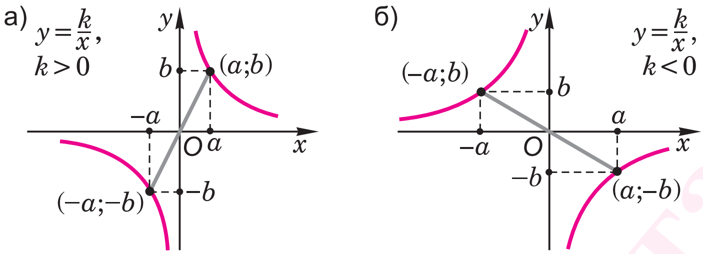


Рис. 59

?

1. Какая зависимость называется обратной пропорциональностью?
2. В каком случае переменная y называется обратно пропорциональной переменной x?
3. Как называется число k в формуле $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$?
4. Будут ли обратно пропорциональными переменные x и y, если обратно пропорциональны y и x?
5. Что означает обратная пропорциональность переменных x и y?
6. Как называется график функции $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$?
7. Как на изображении графика функции $y = \frac{k}{x}$ отражаются ее свойства при:

   а) $k > 0$; б) $k < 0$?

8*. Докажите свойства функции $y = \frac{k}{x}$ при:

   а) $k > 0$; б) $k < 0$.

Упражнения

1.146°. Найдите значения функции, заданной формулой $y = \frac{5}{x}$, если x принимает значения: –25; –10; –5; –1; 1; 5; 10; 25.

1.147°. Функция задана формулой $y = -\frac{12}{x}$. Найдите значения y, если x принимает значения: –12; –6; –4; –3; –1; 1; 3; 4; 6; 12; 24.

1.148. Найдите время t, которое необходимо для преодоления расстояния в 900 км, если средняя скорость поезда v равна: 30 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 40 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 45 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 60 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

1.149°. Обратная пропорциональность задана формулой $y = \frac{60}{x}$.

1) Найдите значение функции, если значение аргумента равно: –100; –50; –30; –10; 5; 10; 60; 90; 120; 180.
2) Найдите значение аргумента, если значение функции равно: –240; –120; –90; –60; –30; –1; 1; 10; 60; 180.

1.150. Функция задана таблицей. Могут ли переменные x и y быть обратно пропорциональными?

1)

x	1	2	4	10	40
y	20	10	5	2	0,5

2)

x	1	3	4	6	8
y	–1	–5	–7	–11	–15

3)

x	2	3	6	8	12
y	12	8	4	3	1

4)

x	–4	–3	–2	6	12
y	3	4	6	–2	–1

1.151°. Принадлежит ли графику функции $y = \frac{20}{x}$ точка:

1) $A(-5; -4)$; 2) $B\left(-1;\ -\frac{1}{20}\right)$;

3) $C(40; 2)$; 4) $D\left(25;\ \frac{4}{5}\right)$;

5) $K\left(-\frac{1}{2};\ -40\right)$; 6) $M\left(\frac{2}{7};\ 70\right)$?

1.152°. Точка $M(a; b)$ принадлежит графику функции

$$y = -\frac{24}{x}.$$

1) Укажите значения a, если соответствующие значения b равны: –6; –3; –2,4; 8; 12; 48.

2) Укажите значения b, если соответствующие значения a равны: –24; –8; –4; –0,5; 3; 6; 36.

1.153. Точка $P(m;\ n)$ принадлежит графику функции $y = \frac{45}{x}$.

Принадлежит ли графику этой функции точка:

1) $A(-m;\ -n)$;
2) $B(-m;\ n)$;
3) $C(m;\ -n)$;
4) $D(n;\ m)$;
5) $K\left(9m;\ \frac{1}{9}n\right)$;
6) $M\left(-\frac{1}{3}m;\ -3n\right)$?

1.154. Задайте функцию формулой, если известно, что она является обратной пропорциональностью и значению аргумента, равному a, соответствует значение функции, равное b:

1) $a = 6,\ b = 3$;
2) $a = \frac{1}{2},\ b = 12$;
3) $a = 0{,}1,\ b = 50$;
4) $a = 15,\ b = 90$.

1.155. 1) Переменные p и q обратно пропорциональны. Найдите значение p_1, если $p_2 = 5,\ q_1 = 3,\ q_2 = 6$.

2) Переменные m и n обратно пропорциональны. Найдите значение m_1, если $m_2 = 10,\ n_1 = 8,\ n_2 = -4$.

1.156°. Принадлежит ли графику функции $y = -\frac{15}{x}$ точка:

1) $A(-1;\ 15)$;
2) $B(3;\ 5)$;
3) $C(10;\ -1{,}5)$;
4) $D(-0{,}5;\ 30)$;
5) $K\left(\frac{1}{3};\ 45\right)$;
6) $M\left(\frac{3}{5};\ -25\right)$?

1.157°. 1) Изобразите график функции y, предварительно заполнив в тетради таблицу, и укажите ее свойства, если:

1) $y = -\frac{4}{x}$;

x	–8	–4	–2	–1	1	2	4	8
y								

2) $y = -\frac{5}{x}$.

x	–10	–5	–2	–1	1	2	5	10
y								

1.158°. Используя изображение графика функции $y = \frac{3}{x}$ (см. рис. 50), найдите:

1) приближенное значение функции, если значение аргумента равно –3,2; –2,4; 1,2; 2,8; 3,6;
2) приближенное значение аргумента, если значение функции равно –2,2; –1,6; 2; 3,4; 4.

1.159°. Для функции $y = -\frac{6}{x}$ найдите:

1) значение функции, которое соответствует значению аргумента: –8; –6; –3; 2; 4; 9;
2) значение аргумента, которое соответствует значению функции: –10; –4; –2; –1; 2; 4; 6; 8.

1.160°. Задайте формулой обратную пропорциональность, если известно, что ее график проходит через точку:

1) $A(12; 24)$; 2) $B(-26; -13)$;
3) $C(-30; 15)$; 4) $D(25; -5)$.

Изобразите график этой функции и укажите ее свойства.

1.161°. На рисунке 60 изображен график зависимости длины b прямоугольника с постоянной площадью S от ширины a.

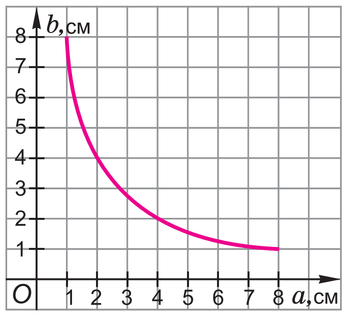


Рис. 60

1) Какова ширина прямоугольника, если его длина равна 2 см; 1,5 см; 4 см; 8 см?
2) Какова длина прямоугольника, если его ширина равна 1,5 см; 2,5 см; 4,5 см; 6,5 см?
3) Каково значение площади прямоугольника S?

1.162. Изобразите график функции, заданной формулой $y = \frac{5}{x}$ на множестве D, если:

1) $D = \boldsymbol{N}$; 2) $D = \boldsymbol{Z},\ x \neq 0$;
3) $D = \{-5; -2; 2; 5; 6\}$; 4) $D = [-5; -1]$;
5) $D = \left[\frac{1}{5};\ 5\right)$; 6) $D = \{-4; -2; -1\}$;
7) $D = (-10; -5) \cup [1; 2)$; 8) $D = [-5; 0) \cup (0; 10]$.

1.163*. Изобразите график функции, заданной формулой, и укажите ее свойства:

1) $y = \dfrac{48}{(2x-3)^2-(2x+3)^2}$;　　2) $y = \dfrac{-80}{(5x-2)^2-(2+5x)^2}$;

3) $y = \dfrac{x^2+1+2x}{6x+6} \cdot \dfrac{12}{x^2+x}$;　　4) $y = \dfrac{25}{x-5} \cdot \dfrac{(x-5)^2}{25x-5x^2}$.

1.164. Известно, что графики функций $y = \dfrac{k}{x}$ и $y = kx + b$ проходят через точку:

1) $A(-1; -1)$;　　2) $B(-1; 1)$;
3) $C(-3; 1)$;　　4) $D(1; -5)$.

Найдите k и b.

1.165. При каких значениях a график обратной пропорциональности, заданной формулой $y = \dfrac{k}{x}$, расположен в I и III координатных углах, если:

1) $k = 2a - 12$;　　2) $k = 4a + 1$;
3) $k = 5 - 10a$;　　4) $k = 1{,}2 - 3{,}6a$;
5) $k = |a| - 1$;　　6) $k = |a + 2| - 3$?

1.166. При каких значениях a график обратной пропорциональности, заданной формулой $y = \dfrac{k}{x}$, расположен во II и IV координатных углах, если:

1) $k = 12a - 1$;　　2) $k = 6 + 3a$;
3) $k = 1{,}4 - 4{,}2a$;　　4) $k = 3{,}9a - 7{,}8$;
5) $k = |a| - 4$;　　6) $k = |a - 1| - 5$?

1.167. Найдите a, если графику функции $y = \dfrac{2}{x}$ принадлежит точка:

1) $K(a - 2;\ a - 1)$;　　2) $K(a + 2;\ a - 2{,}6)$;
3) $K(a - 0{,}5;\ a + 3)$;　　4) $K\left(a - 4;\ a - 6\frac{1}{3}\right)$.

▲ 1.10. Построение графиков функций сдвигами

В 8-м классе мы научились из графика $y = x^2$ различными преобразованиями получать изображения графиков других квадратичных функций. Покажем теперь, как два из этих преобразований (сдвиг вдоль оси Oy и сдвиг вдоль оси Ox) применяются для преобразования графиков некоторых изученных ранее функций.

1. Сдвиг вдоль оси ординат

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x} + 3$. Ее график мы получим из известного нам графика функции $y = \sqrt{x}$ (см. п. 1.7, рис. 41).

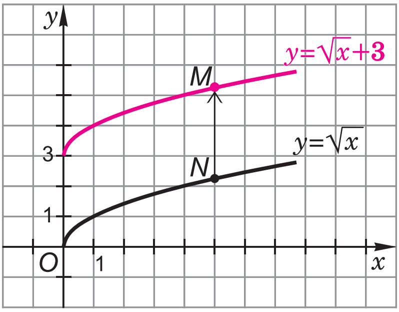


Рис. 61

При любом значении x значение выражения $\sqrt{x} + 3$ больше значения выражения $\sqrt{x}$ на 3 единицы. Поэтому каждую точку M графика функции $y = \sqrt{x} + 3$ можно получить из соответствующей точки N графика функции $y = \sqrt{x}$, увеличив y на 3 единицы (рис. 61). То есть каждую точку M можно получить из точки N с той же абсциссой, сдвинув точку N на 3 единицы вверх. Значит, график функции $y = \sqrt{x} + 3$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом на 3 единицы вверх вдоль оси Oy (см. рис. 61).

Аналогично устанавливается, что график функции $y = \sqrt{x} - 3$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом на 3 единицы вниз вдоль оси Oy.

Вообще,

! график функции $y = \sqrt{x} + t$ получается сдвигом графика функции $y = \sqrt{x}$ вдоль оси Oy на t единиц вверх, когда $t > 0$, и на $|t|$ единиц вниз, когда $t < 0$.
Подобное утверждение справедливо не только для функции $y = \sqrt{x}$, но и для любой другой функции.

2. Сдвиг вдоль оси абсцисс

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x - 2}$. Ее график мы тоже получим из графика функции $y = \sqrt{x}$. Заполним таблицу:

x	0	1	2	3	4	5	6
$y = \sqrt{x}$	0	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4
$y = \sqrt{x - 2}$			0	1	1,4	1,7	2

Используя ее данные, изобразим в одной системе координат графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x-2}$ (рис. 62).

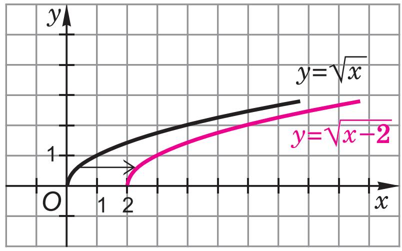


Рис. 62

Если внимательно посмотреть на рисунок, то связь между графиками функций становится очевидной: график функции $y = \sqrt{x-2}$ сдвинут относительно графика функции $y = \sqrt{x}$ на две единицы вправо вдоль оси Ox.

К этому же выводу можно прийти и не изображая графики этих функций, а только рассматривая таблицу. Нетрудно увидеть, что функция $y = \sqrt{x-2}$ принимает те же значения, что и функция $y = \sqrt{x}$, только принимает она их при значениях x, больших на 2 единицы.

Аналогично устанавливается, что график функции $y = \sqrt{x+2}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом на 2 единицы влево вдоль оси Ox.

Вообще,

! график функции $y = \sqrt{x-s}$ получается сдвигом графика функции $y = \sqrt{x}$ вдоль оси Ox на s единиц вправо, когда $s > 0$, и на $|s|$ единиц влево, когда $s < 0$.
Подобное утверждение справедливо не только для функции $y = \sqrt{x}$, но и для любой другой функции.

3. Комбинация сдвигов

Применяя последовательно сдвиги графика функции $y = \sqrt{x}$ вдоль оси Ox, а затем вдоль оси Oy (или вдоль оси Oy, а затем вдоль оси Ox), можно получить изображение графика более сложной функции.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x+2} - 3$. Ее график можно получить в два шага:

а) *преобразовать график функции* $y = \sqrt{x}$ *в график функции* $y = \sqrt{x+2}$. Это делается сдвигом графика функции $y = \sqrt{x}$ вдоль оси Ox на 2 единицы влево (рис. 63);

б) *преобразовать график функции* $y = \sqrt{x+2}$ *в график функции* $y = \sqrt{x+2} - 3$. Это делается сдвигом графика функции $y = \sqrt{x+2}$ вдоль оси Oy на 3 единицы вниз (см. рис. 63).

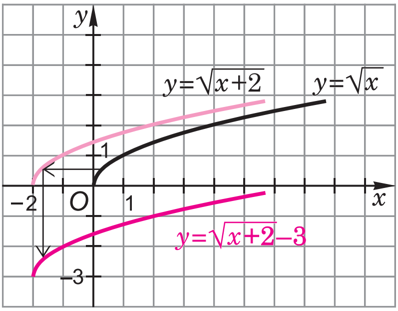


Рис. 63

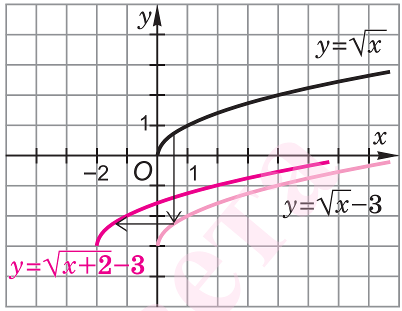


Рис. 64

Можно, как было сказано, изменить порядок:

а) *преобразовать график функции* $y = \sqrt{x}$ *в график функции* $y = \sqrt{x} - 3$ (рис. 64);

б) *преобразовать график функции* $y = \sqrt{x} - 3$ *в график функции* $y = \sqrt{x+2} - 3$ (см. рис. 64).

Вообще,

! график функции $y = \sqrt{x-s} + t$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ двумя последовательными сдвигами на соответствующее число единиц вдоль координатных осей (безразлично в каком порядке).
Аналогичное утверждение справедливо не только для функции $y = \sqrt{x}$, но и для любой другой функции.

4. График функции $y = |x|$ и его сдвиги

Рассмотрим функцию $y = |x|$.

Областью определения этой функции является естественная область определения выражения $|x|$, т. е. множество $\boldsymbol{R}$, поскольку при любом значении независимой переменной x существует, и притом единственное, значение выражения $|x|$.

А как изобразить график функции $y = |x|$? Заметим, что при неотрицательных значениях переменной x по определению модуля $|x| = x$. Значит, при $x \geqslant 0$ этот график совпадает с графиком функции $y = x$. Таким образом, при $x \geqslant 0$ графиком функции $y = |x|$ является биссектриса I координатного угла (рис. 65).

При отрицательных значениях x по определению модуля $|x| = -x$. Значит, при $x < 0$ график функции $y = |x|$ совпадает с графиком функции $y = -x$. Таким образом, при $x \leqslant 0$ графиком функции $y = |x|$ является биссектриса II координатного угла (рис. 66).

Итак, на множестве $\boldsymbol{R}$ для функции $y = |x|$ получается график, изображенный на рисунке 67.

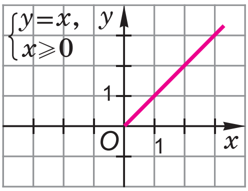


Рис. 65

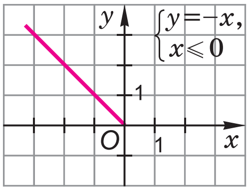


Рис. 66

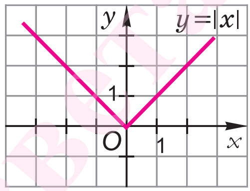


Рис. 67

Рассмотрим функцию

$$y = |x - 3| - 4.$$

Ее график можно изобразить в два шага:

а) сдвигом графика функции $y = |x|$ вдоль оси Oy на 4 единицы вниз получаем график функции $y = |x| - 4$ (рис. 68);

б) сдвигом графика функции $y = |x| - 4$ вдоль оси Ox на 3 единицы вправо получаем график функции $y = |x - 3| - 4$ (см. рис. 68).

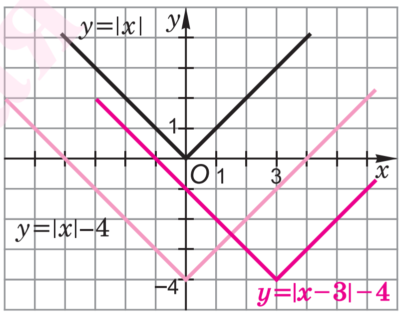


Рис. 68

?

1. Как получить изображение графика функции:

а) $y = |x|$;
б) $y = |x| + 1$;
в) $y = |x + 5|$;
г) $y = |x - 3| + 2$?

2. График какой функции получится из графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ при его сдвиге:

а) вдоль оси Oy на 12 единиц вниз;
б) вдоль оси Ox на 7 единиц влево;
в) вдоль оси Oy на 9 единиц вверх и вдоль оси Ox на 2 единицы вправо?

3. Какими сдвигами вдоль осей Ox и Oy из графика функции $y = x^3$ получится график функции $y = (x - s)^3 + t$, если:
а) $t > 0$ и $s < 0$; б) $t < 0$ и $s > 0$;
в) $t > 0$ и $s > 0$; г) $t < 0$ и $s < 0$?

Упражнения

1.168*. Изобразите график функции и укажите ее свойства:

1) $y = \sqrt{x} + 5$; 2) $y = \sqrt{x} + 2$;
3) $y = \sqrt{x} - 4$; 4) $y = \sqrt{x} - 1$;
5) $y = 2 - \sqrt{x}$; 6) $y = 3 - \sqrt{x}$;
7) $y = \sqrt{-x}$; 8) $y = -\sqrt{-x}$;
9) $y = 3 - \sqrt{-x}$; 10) $y = 2 + \sqrt{-x}$;
11) $y = \sqrt{x - 4} + 3$; 12) $y = \sqrt{x + 5} - 2$.

1.169. Изобразите график функции:

1) $y = (x - 2)^3 - 4$; 2) $y = (x + 3)^3 + 1$;
3) $y = \frac{2}{x + 3} - 1$; 4) $y = \frac{-1}{x - 2} + 3$;
5) $y = -x^3 + 4$; 6) $y = -x^3 - 2$;
7) $y = \frac{-3}{x + 2} + 1$; 8) $y = \frac{2}{x - 3} - 3$.

1.170. Изобразите график функции, заданной следующей формулой на области определения D, и укажите свойства этой функции, если:

1) $y = |x|$, $D = [-1;\ 4]$;
2) $y = \sqrt{x^2}$, $D = [-5;\ 2]$;
3) $y = |x| + 1$, $D = [-4;\ 4]$;
4) $y = |x| - 2$, $D = [-3;\ 6]$.

1.171. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = |x|$ с графиком функции, заданной формулой:

1) $y = 6$; 2) $y = 1{,}2$;
3) $y = (-4)^2$; 4) $y = (-3)^3$;
5) $y = (-385{,}7)^0$; 6) $y = (-0{,}734)^0$;
7) $y = \sqrt{(-15)^2}$; 8) $y = \sqrt{(-3)^2}$.

1.172. При каких значениях a координаты точки удовлетворяют уравнению $y - |x| = 0$:

1) $P(a^2; -4a - 3)$;
2) $M(a^2; 7a - 12)$;
3) $K(2a^2; 6a + 8)$;
4) $T(3a^2; -9a + 30)$?

1.173*. При каком значении a указанной формулой будет задана функция $y = |x|$:

1) $y = (a^2 - 5a + 7) \cdot |x|$;
2) $y = (7a - a^2 - 9) \cdot |x|$;
3) $y = (10 - a^2) \cdot |x|$;
4) $y = (a^4 - 80) \cdot |x|$;
5) $y = \dfrac{a^2 - 1}{a - 1} \cdot |x|$;
6) $y = \dfrac{(a - 1)(a - 2)}{a - 1} \cdot |x|$;
7) $y = \dfrac{a + 7}{a + 7} \cdot |x|$;
8) $y = \dfrac{a^2 + 9}{a^2 + 9} \cdot |x|$?

1.174*. Изобразите график функции и укажите ее свойства:

1) $y = |x|$;
2) $y = |-x|$;
3) $y = -|x|$;
4) $y = -|-x|$;
5) $y = 2|x|$;
6) $y = 0{,}5|x|$;
7) $y = -0{,}5|x|$;
8) $y = -2|x|$;
9) $y = |x + 2|$;
10) $y = |x - 2|$;
11) $y = |x| - 2$;
12) $y = |x| + 2$.

1.175. Изобразите график функции и укажите ее свойства:

1) $y = \sqrt{x - 4} + 5$;
2) $y = \sqrt{x + 3} - 2$;
3) $y = (x - 4)^3 + 5$;
4) $y = (x + 3)^3 - 2$;
5) $y = \dfrac{1}{x - 4} + 5$;
6) $y = \dfrac{1}{x + 3} - 2$;
7) $y = |x - 4| + 5$;
8) $y = |x + 3| - 2$.

1.176*. Изобразите график функции:

1) $y = \sqrt{|x|}$;
2) $y = \dfrac{1}{|x|}$;
3) $y = (|x| - 1)^3$;
4) $y = \sqrt{|x| + 1}$;
5) $y = \dfrac{1}{|x| + 1}$;
6) $y = |x|^3 - 1$.

Глава 2
Квадратные неравенства

2.1. Неравенства с одной переменной

Напомним некоторые сведения о неравенствах.

Неравенство, содержащее одну переменную, называется *неравенством с одной переменной* или *неравенством с одним неизвестным*.

***Решением неравенства с одной переменной* называется такое значение переменной, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.**

***Решить неравенство* — это значит найти все его решения или доказать, что их нет.**

Мы уже умеем решать линейные неравенства и простейшие неравенства с модулем. А сейчас мы будем рассматривать решение неравенств, содержащих переменную во второй степени.

Пример 1. Решить неравенство

$$(x-1)^2 > 0.$$

Решение. Если $x = 1$, то $(x-1)^2 = 0$ и, значит, число 1 не является решением данного неравенства.

Если $x \neq 1$, то $x - 1 \neq 0$, и поэтому при любых значениях $x \neq 1$ имеем верное числовое неравенство $(x-1)^2 > 0$. Значит, его решение — любое число, кроме 1, т. е. $x \neq 1$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

О неравенстве $(x-1)^2 > 0$ можно сказать, что *при* $x \neq 1$ *оно выполняется*, или что *оно верно*.

Пример 2. Решить неравенство

$$(x-1)^2 < 0.$$

Решение. При любом значении x значение выражения $(x-1)^2$ неотрицательное. Значит, неравенство $(x-1)^2 < 0$ не выполняется и потому не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Пример 3. Решить неравенство

$$(x-1)^2 \leqslant 0.$$

Решение. Так как при $x = 1$ данное неравенство обращается в верное числовое неравенство $0 \leqslant 0$, то $x = 1$ — его решение. Других решений нет.

Ответ: 1.

! Два неравенства называются равносильными, если каждое решение первого неравенства является решением второго неравенства, и наоборот — каждое решение второго неравенства является решением первого, т. е. они имеют одни и те же решения. Равносильными называются и неравенства, которые не имеют решений.

Например, неравенства $(x-1)^2 < 0$ и $x^2 < 0$ равносильны, так как каждое из них не имеет решений. Неравенства $(x-1)^2 \geqslant 0$ и $\frac{1}{(x-1)^2} \geqslant 0$ неравносильны, так как решением первого неравенства является любое число, а решением второго неравенства является любое число $x \neq 1$.

Определение. Неравенство вида

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$(ax^2 + bx + c \geqslant 0,\ \ ax^2 + bx + c < 0,\ \ ax^2 + bx + c \leqslant 0)$$

с переменной x, где $a \neq 0$, называется *квадратным* или *неравенством второй степени*.

Заметим, что неравенства из примеров 1—3 являются квадратными (поясните почему).

Решим еще несколько квадратных неравенств.

Пример 4. Решить неравенство:

а) $x^2 < 5$; б) $x^2 - 16 \geqslant 0$; в) $x^2 \leqslant 0$; г) $x^2 + 5 < 0$.

Решение. а) Извлекая арифметический квадратный корень из обеих частей неравенства $x^2 < 5$, получаем равносильное ему неравенство $|x| < \sqrt{5}$, откуда $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$.

б) Неравенство $x^2 - 16 \geqslant 0$ равносильно неравенству $x^2 \geqslant 16$, откуда $|x| \geqslant 4$, т. е. $x \leqslant -4$ или $x \geqslant 4$.

в) Неравенство $x^2 \leqslant 0$ верно только при $x = 0$.

г) Неравенство $x^2 + 5 < 0$ при всех значениях x обращается в неверное числовое неравенство, а значит, не имеет решений.

Ответ: а) $(-\sqrt{5};\ \sqrt{5})$; б) $(-\infty;\ -4] \cup [4;\ +\infty)$;
в) 0; г) решений нет.

Решение каждого из неравенств в примере 4 можно проиллюстрировать. Изобразим, например, для случая а) в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = 5$ (рис. 69). На рисунке видно, что при $x \in (-\sqrt{5};\ \sqrt{5})$ часть параболы $y = x^2$ находится ниже прямой $y = 5$.

Проиллюстрируйте решения неравенств б), в), г) примера 4 самостоятельно.

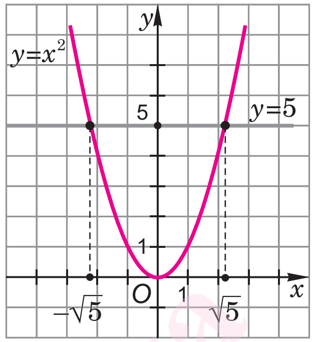


Рис. 69

1. Что называется решением неравенства с одной переменной (с одним неизвестным)?
2. Что значит решить неравенство?
3. Какие два неравенства называются равносильными?
4. Назовите свойства неравенств, которые используются при их решении.
5. Какое неравенство называется квадратным (или неравенством второй степени)? Какие еще неравенства вы знаете?

Упражнения

Решите неравенство (2.1—2.3).

2.1°. 1) $5x + 6 < 18 - 3x$;

2) $-2(x + 15) < -30$;

3) $-\frac{x}{3} < 2x - \frac{5 - 6x}{4}$;

4) $0{,}25(2x + 5) < 7x - \frac{10x + 3}{2}$;

5) $4(x - 1) - x(8 - x) < x^2$;

6) $x^2 - (3 + x)x > 2(x - 1)$;

7) $(x + 2)^2 \leqslant (x - 3)^2$;

8) $(7 - x)^2 \geqslant (x + 3)^2$.

2.2. 1) $|x - 3| < 6$; 2) $|x + 6| < 12$;

3) $|2x + 16| > 24$; 4) $|15 + 3x| > 30$;

5) $|4 - 6x| \geqslant 18$; 6) $|9 - 5x| \geqslant 51$;

7) $|0{,}1x - 4| < 1{,}2$; 8) $|0{,}5x + 4| < 5{,}8$;

9) $\left|\frac{1}{3}x + 10\right| > 5$; 10) $\left|6 + \frac{1}{7}x\right| > 12$.

2.3. 1) $\sqrt{(x-8)^2} \geqslant 1$; 2) $\sqrt{(4-x)^2} \leqslant 3$;

3) $\sqrt{(4x+1)^2} < 7$; 4) $\sqrt{(0{,}2-6x)^2} > 5$;

5) $\sqrt{(9x-3)^2} \geqslant -4$; 6) $\sqrt{(5-2x)^2} \leqslant -3$;

7) $\sqrt{\left(\frac{1}{4}x-\frac{6}{7}\right)^2} > 0$; 8) $\sqrt{\left(\frac{3}{8}x+4\right)^2} \leqslant 0$.

2.4°. Равносильны ли неравенства:

1) $x^2 \leqslant 9$ и $x \leqslant 3$;
2) $x^2 \geqslant 25$ и $x \geqslant 5$;
3) $x^2 > 21$ и $x > \sqrt{21}$;
4) $x^2 < 57$ и $x < \sqrt{57}$?

2.5°. Решите неравенство:

1) $x^2 \geqslant 0$; 2) $x^2 < 0$;
3) $x^2 \leqslant -81$; 4) $x^2 < -16$;
5) $-x^2 \geqslant 25$; 6) $-x^2 \leqslant -36$.

2.6°. Из чисел -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 выберите те, которые являются решениями неравенства:

1) $x^2 - 16 > 0$; 2) $x^2 - 1 \leqslant 0$;
3) $x^2 - x + 3 \leqslant 0$; 4) $x^2 + 2x + 7 > 0$;
5) $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$; 6) $x^2 + 2x + 1 > 0$;
7) $x^2 - 5x + 6 > 0$; 8) $x^2 - 5x - 6 \leqslant 0$.

Решите неравенство **(2.7—2.10).**

2.7°. 1) $(x+3)^2 > 0$; 2) $(x+3)^2 < 0$;
3) $(x+3)^2 \leqslant 0$; 4) $(x+3)^2 \geqslant 0$;
5) $(8-x)^2 < 0$; 6) $(8-x)^2 > 0$;
7) $(8-x)^2 \geqslant 0$; 8) $(8-x)^2 \leqslant 0$;
9) $-x^2 + 2x - 1 \leqslant 0$; 10) $-x^2 - 8x - 16 \geqslant 0$.

2.8°. 1) $x^2 + 4 \leqslant 0$; 2) $x^2 + 4 \geqslant 0$;

3) $-9 - x^2 > 0$; 4) $-9 - x^2 < 0$.

2.9. 1) $x^2 \geqslant 49$; 2) $x^2 \leqslant 64$;

3) $x^2 < 144$; 4) $x^2 > 225$;
5) $x^2 \leqslant 7$; 6) $x^2 \geqslant 11$.

2.10. 1) $2x^2 + 6 > 8$; 2) $3x^2 - 2 \leqslant 10$;

3) $6x^2 + 4 < 34$; 4) $7x^2 - 131 \geqslant 121$;
5) $4x^2 - 13 > 11$; 6) $5x^2 + 18 < 83$.

2.11. Докажите, что если верно неравенство $m > n$, то верно и неравенство:

1) $8 + m > 8 + n$; 2) $28m > 28n$;
3) $-4m < -4n$; 4) $m - 10 > n - 10$;
5) $\frac{2m}{3} > \frac{2n}{3}$; 6) $\frac{m}{6} > \frac{n}{6}$;
7) $5 - m < 5 - n$; 8) $4m - 13 > 4n - 13$;
9) $6 - \frac{m}{3} < 6 - \frac{n}{3}$; 10) $m^3 > n^3$.

2.12. Равносильны ли неравенства:

1) $4x^2 < 9x$ и $4x < 9$;
2) $3x^5 > 8x^3$ и $3x^3 > 8x$;
3) $9x^4 \leqslant 7x^3$ и $9x \leqslant 7$;
4) $3x^3 \geqslant 5x^2$ и $3x \geqslant 5$?

2.13*. При каком значении p равносильны неравенства:

1) $2x^2 - 8x^4 > 0$ и $p - 4x^2 > 0$;
2) $5x^3 + 2x \leqslant 0$ и $2x^3 + 0{,}8x + p \leqslant 0$;
3) $x^4 - 12x^2 + 36 \geqslant 0$ и $(x^2 - p)^2 \geqslant 0$;
4) $-25x^4 - 4 - 20x^2 \leqslant 0$ и $-(p - 5x^2)^2 \leqslant 0$;
5) $x^2 - 12x + 35 > 0$ и $(x - 5)(x - p) > 0$;
6) $x^2 - x - 42 < 0$ и $(x - p)(x + 6) < 0$?

Решите неравенство относительно x **(2.14—2.15).**

2.14*. 1) $x^2 < p$; 2) $x^2 \geqslant p$;
3) $x^2 \leqslant -p^2$; 4) $x^2 > -p^2$.

2.15*. 1) $(x - p)^2 \geqslant 0$; 2) $(x + p)^2 < 0$;
3) $(x + 4)^2(x - p) < 0$; 4) $(-x - 1)^2(x + p) \geqslant 0$;
5) $(x - p)^2(x - 5) \leqslant 0$; 6) $(x + p)^2(x + 6) > 0$.

2.2. Квадратные неравенства с отрицательным дискриминантом

Определение. Дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части квадратного неравенства, называется *дискриминантом квадратного неравенства*.

Если в квадратном неравенстве старший коэффициент отрицательный, то, умножая обе части неравенства на число -1 и меняя его знак на противоположный, получаем неравенство, равносильное данному, с положительным старшим коэффициентом. Например, неравенство $-3x^2 + 6x - 5 < 0$ равносильно неравенству $3x^2 - 6x + 5 > 0$.

! В дальнейшем мы можем ограничиться изучением квадратных неравенств с положительным старшим коэффициентом.

Рассмотрим решение неравенств вида

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$(ax^2 + bx + c \geqslant 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leqslant 0),$$

где $a > 0$; $D = b^2 - 4ac < 0$.

Пример 1. Решить неравенство

$$3x^2 - 6x + 5 > 0.$$

Решение. Здесь $D = 36 - 60 = -24 < 0$; $a = 3 > 0$.

Рассмотрим параболу $y = 3x^2 - 6x + 5$.

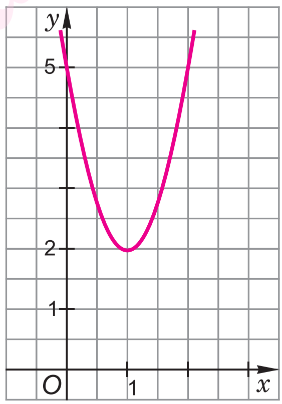


Рис. 70

Так как старший коэффициент $a = 3$ положительный, то ветви параболы направлены вверх, а так как дискриминант $D = -24$ отрицательный, то парабола не пересекается с осью Ox (рис. 70). Поэтому она расположена над осью Ox, т. е. при любом значении x имеем $y > 0$. Значит, при любом значении x верно неравенство $3x^2 - 6x + 5 > 0$.

Ответ: любое число.

Этот ответ можно записать и иначе: $\boldsymbol{R}$ или $(-\infty; +\infty)$.

Заметим, что при решении этого неравенства нас интересовало, куда направлены ветви параболы и как она расположена относительно оси Ox. Поэтому можно было бы ограничиться упрощенным вспомогательным рисунком (рис. 71).

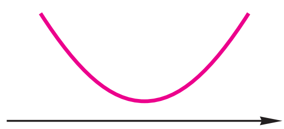


Рис. 71

Пример 2. Решить неравенство $2x^2 + 4x + 3 \leqslant 0$.

Решение. Имеем: $D = 16 - 24 = -8 < 0$; $a = 2 > 0$.

Рассмотрим параболу $y = 2x^2 + 4x + 3$.

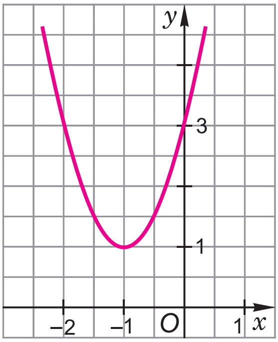


Рис. 72

Так как старший коэффициент $a = 2$ положительный, то ветви параболы направлены вверх, а поскольку дискриминант $D = -8$ отрицательный, то парабола не пересекается с осью Ox (рис. 72). Поэтому парабола $y = 2x^2 + 4x + 3$ расположена над осью Ox; таким образом, при любом значении x имеем $y > 0$. Значит, при любом значении x верно неравенство $2x^2 + 4x + 3 > 0$ и, следовательно, неравенство $2x^2 + 4x + 3 \leqslant 0$ решений не имеет.

Ответ: решений нет.

Приведем возможное оформление решения неравенства из примера 2:

$$2x^2 + 4x + 3 \leqslant 0;$$
$$D = 16 - 24 = -8 < 0;\ a = 2 > 0.$$

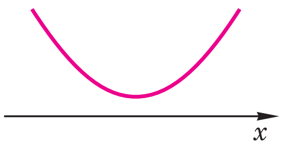


Рис. 73

Парабола $y = 2x^2 + 4x + 3$ расположена над осью Ox (рис. 73), т. е. $y > 0$ при любом значении x, поэтому неравенство $2x^2 + 4x + 3 \leqslant 0$ решений не имеет.

Ответ: решений нет.

Пример 3. Решить неравенство $-4x^2 + 8x - 5 \leqslant 0$.

Решение. Неравенство $-4x^2 + 8x - 5 \leqslant 0$ равносильно неравенству $4x^2 - 8x + 5 \geqslant 0$.

Имеем: $D = 64 - 80 = -16 < 0$; $a = 4 > 0$.

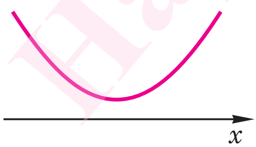


Рис. 74

Парабола $y = 4x^2 - 8x + 5$ расположена над осью Ox (рис. 74), т. е. $y > 0$ при любом значении x, поэтому исходное неравенство $-4x^2 + 8x - 5 \leqslant 0$ верно при любом значении x.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

Пример 3 можно было решить так:

$$-4x^2 + 8x - 5 \leqslant 0;$$
$$D = 64 - 80 = -16 < 0;\ a = -4 < 0.$$

Парабола $y = -4x^2 + 8x - 5$ расположена под осью Ox (рис. 75), т. е. $y < 0$ при любом значении x, поэтому неравенство $-4x^2 + 8x - 5 \leqslant 0$ верно при любом значении x.

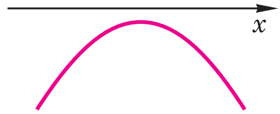


Рис. 75

Пример 4. Решить неравенство $-x^2 - 3x - 3 > 0$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству $x^2 + 3x + 3 < 0$.

Имеем: $D = 9 - 12 = -3 < 0$; $a = 1 > 0$.

Парабола $y = x^2 + 3x + 3$ расположена над осью Ox (рис. 76), т. е. $y > 0$ при любом значении x, поэтому неравенство $x^2 + 3x + 3 < 0$ (а значит, и данное неравенство) решений не имеет.

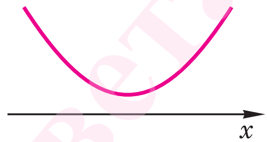


Рис. 76

Ответ: решений нет.

?

1. Что называется дискриминантом квадратного неравенства?
2. В каком случае квадратное неравенство $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ с отрицательным дискриминантом не имеет решений?
3. В каком случае решением квадратного неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ с отрицательным дискриминантом является любое число?

Упражнения

2.16. Докажите, что при любом значении x верно неравенство:

1) $2x^2 + 27 > 0$;
2) $6x^2 + 13 > 0$;
3) $(x - 2)^2 + 6 > 0$;
4) $(x + 8)^2 + 3 > 0$;
5) $-(x + 1)^2 - 4 < 0$;
6) $-(x - 2)^2 - 4 < 0$;
7) $(25x^2 - 8)^2 \geqslant 0$;
8) $(x - 9)^2 + 48^0 \geqslant 0$.

Решите неравенство **(2.17—2.20)**.

2.17°. 1) $x^2 + x + 2 > 0$;
2) $x^2 + 3x + 5 \geqslant 0$;
3) $x^2 - 4x + 6 \geqslant 0$;
4) $4x^2 - 8x + 9 \leqslant 0$;
5) $x^2 + 6x + 10 < 0$;
6) $3x^2 + 2x + 4 > 0$;
7) $2x^2 - 4x + 9 \leqslant 0$;
8) $2x^2 - 3x + 7 < 0$.

2.18°. 1) $-x^2 + 4x - 7 > 0$;
2) $-3x^2 - 6x - 8 < 0$;
3) $-x^2 + 3x - 4 < 0$;
4) $-x^2 + x - 2 > 0$;
5) $-2x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$;
6) $-3x^2 + 5x - 9 \geqslant 0$;
7) $-x^2 + 3x - 5 \geqslant 0$;
8) $-5x^2 - 10x - 8 \leqslant 0$;

9) $-\frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{10}{3} > 0;$

10) $-0{,}5x^2 - 5{,}5x - 25 < 0.$

2.19°. 1) $x^2 - 5x + 10 > 0;$ 2) $2x^2 - 3x + 5 > 0;$
3) $-3x^2 + 4x - 5 < 0;$ 4) $-x^2 + 3x - 8 < 0.$

2.20. 1) $x > x^2 + 4;$ 2) $2x > x^2 + 3;$
3) $4 + x^2 \geqslant 3x;$ 4) $8 + 5x < -x^2;$
5) $3x^2 > x - 5;$ 6) $6 - 3x < -2x^2;$
7) $\frac{x^2}{10} - \frac{7x}{5} \geqslant -5;$ 8) $\frac{x^2}{3} - \frac{3x - 10}{4} \leqslant \frac{2x}{3}.$

2.21. Докажите, что при $q > 100$ любое значение x является решением неравенства:

1) $x^2 - 4x + q > 0;$ 2) $x^2 + 20x + q > 0.$

2.22. Докажите, что при $q > 64$ не имеет решений неравенство:

1) $x^2 + 16x + q \leqslant 0;$ 2) $x^2 - 6x + q \leqslant 0.$

2.23. На рисунке 77 изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Используя график:

а) сравните с нулем значения коэффициентов a, b, c;
б) сравните с нулем значение дискриминанта;
в) укажите значения x, при которых значения y положительны;
г) укажите значения x, при которых значения y отрицательны.

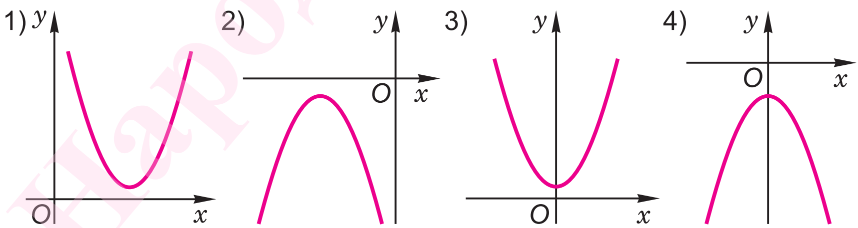


Рис. 77

2.24. Решите неравенство:

1) $(3x^2 - 6x + 17)(0{,}5x - 4) > 0;$
2) $(9x^2 + x + 5)(1{,}5x + 9) < 0;$
3) $(-12x^2 + 5x - 7)(4x + 7) \geqslant 0;$
4) $(-8x^2 - 3x - 9)(5x - 6) \leqslant 0.$

2.3. Квадратные неравенства с дискриминантом, равным нулю

Рассмотрим решение неравенств вида

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$(ax^2 + bx + c \geqslant 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leqslant 0),$$

где $a > 0$; $D = b^2 - 4ac = 0$.

Пример 1. Решить неравенство

$$3x^2 + 2x + \frac{1}{3} > 0. \qquad (*)$$

Решение. *Способ 1.* Рассмотрим параболу

$$y = 3x^2 + 2x + \frac{1}{3}.$$

Имеем: $D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$; $a = 3 > 0$.

Так как старший коэффициент $a = 3$ положительный, то ветви параболы направлены вверх, а поскольку дискриминант $D = 0$, то парабола имеет с осью Ox только одну общую точку. Эта точка — вершина параболы; ее абсцисса $x_0 = -\frac{1}{3}$ — корень уравнения $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = 0$ (рис. 78). Поэтому все точки параболы, за исключением вершины, расположены над осью Ox, т. е. при любом значении $x \neq -\frac{1}{3}$ имеем $y > 0$. Значит, при любом значении $x \neq -\frac{1}{3}$ верно неравенство $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} > 0$.

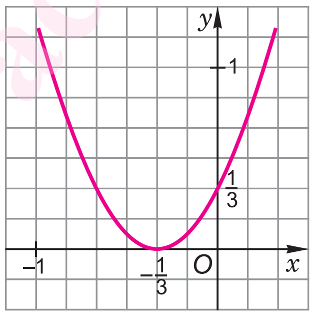


Рис. 78

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Заметим, что при решении неравенства нас интересовало расположение параболы относительно оси абсцисс. Поэтому при решении подобных неравенств можно ограничиться упрощенным вспомогательным рисунком (рис. 79).

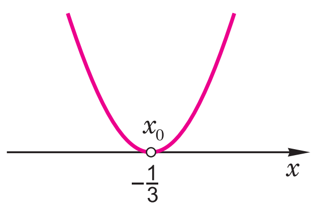


Рис. 79

Запись решения можно оформить так:

$$3x^2 + 2x + \frac{1}{3} > 0;$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = 0; \ a = 3 > 0; \ x_0 = -\frac{2}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{3}.$$

Парабола $y = 3x^2 + 2x + \frac{1}{3}$ касается оси Ox, и ее ветви направлены вверх (см. рис. 79; точка $x_0 = -\frac{1}{3}$ на оси Ox отмечена светлым кружком, поскольку неравенство строгое).

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Способ 2. Рассмотрим квадратный трехчлен $3x^2 + 2x + \frac{1}{3}$. Так как его дискриминант $D = 0$, то трехчлен имеет равные корни $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{3}$ и может быть представлен в виде

$$3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2.$$

Поэтому неравенство (*) можно записать так:

$$3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 > 0.$$

Решением этого неравенства (а значит, и неравенства (*)) является любое значение x, кроме $x = -\frac{1}{3}$, т. е. $x \neq -\frac{1}{3}$.

Пример 2. Решить неравенство $4x^2 - 2x + \frac{1}{4} \leqslant 0$.

Решение. *Способ 1.* $4x^2 - 2x + \frac{1}{4} \leqslant 0$;

$$D = 4 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} = 0; \ a = 4 > 0; \ x_0 = -\frac{-2}{2 \cdot 4} = \frac{1}{4}.$$

Парабола $y = 4x^2 - 2x + \frac{1}{4}$ касается оси Ox, и ее ветви направлены вверх (рис. 80; точка $x_0 = \frac{1}{4}$ на оси Ox отмечена черным кружком, поскольку неравенство нестрогое).

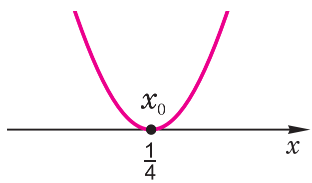


Рис. 80

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Способ 2.

$$4x^2 - 2x + \frac{1}{4} \leqslant 0;$$

$$\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0;$$

$$\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 < 0 \text{ или } \left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

Так как значение выражения $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2$ не может быть отрицательным, то $2x - \frac{1}{2} = 0$, откуда $x = \frac{1}{4}$.

Пример 3. Решить неравенство $-25x^2 + 30x - 9 > 0$.

Решение. *Способ 1.* Умножив обе части неравенства $-25x^2 + 30x - 9 > 0$ на -1, получим равносильное ему неравенство $25x^2 - 30x + 9 < 0$. Имеем:

$$D = (-30)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 9 = 0;$$
$$a = 25 > 0; \; x_0 = \frac{30}{2 \cdot 25} = \frac{3}{5}.$$

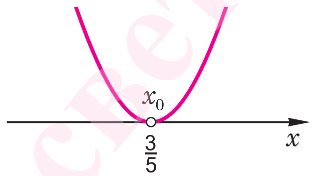


Рис. 81

Парабола $y = 25x^2 - 30x + 9$ касается оси Ox, и ее ветви направлены вверх (рис. 81; поясните, почему точка x_0 отмечена светлым кружком).

Ответ: решений нет.

Способ 2. Данное неравенство равносильное неравенству $25x^2 - 30x + 9 < 0$, т. е. $(5x - 3)^2 < 0$.

Так как неравенство $(5x - 3)^2 \geqslant 0$ выполняется при любых значениях x, то неравенство $(5x - 3)^2 < 0$ (а значит, и исходное неравенство) не имеет решений.

Способ 3.

$$-25x^2 + 30x - 9 > 0;$$
$$D = 30^2 - 4(-25)(-9) = 0;$$
$$a = -25 < 0, \; x_0 = \frac{-30}{2(-25)} = \frac{3}{5}.$$

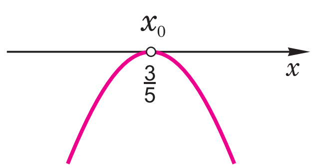


Рис. 82

Парабола $y = -25x^2 + 30x - 9$ касается оси Ox, и ее ветви направлены вниз (рис. 82), значит $y \leqslant 0$, т. е. исходное неравенство решений не имеет.

1. В каком случае квадратное неравенство $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ с дискриминантом, равным нулю, имеет единственное решение?
2. В каком случае квадратное неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ с дискриминантом, равным нулю, не имеет решений?

3. В каком случае решением квадратного неравенства $ax^2+bx+c<0$ с дискриминантом, равным нулю, является любое число?
4. В каком случае квадратное неравенство $ax^2+bx+c>0$ с дискриминантом, равным нулю, имеет бесконечно много решений?

Упражнения

2.25°. Проверьте, являются ли числа -2; -1; 0; $\frac{1}{3}$ решениями неравенства $3x^2+5x-2\leqslant 0$.

2.26. Докажите, что при любых значениях k, при которых дробь имеет смысл, ее значения будут неотрицательными:

1) $\frac{(k-3)^4}{10^0}$; 2) $\frac{k^2+6k+9}{(-2)^4}$;

3) $\frac{25k^2-30k+9}{(-3)^{12}(k^2+6)}$; 4) $\frac{1+49k^2-14k}{(k^2+21)(-2)^0}$;

5) $\frac{(-3-k^2)(-9)^{80}}{-9k^2-1+6k}$; 6) $\frac{-36k^2-36}{(-5)^3(4-3k)^2}$.

Решите неравенство **(2.27—2.28)**.

2.27°. 1) $x^2+16-8x>0$; 2) $x^2+12x+36\geqslant 0$;

3) $9x^2-30x+25<0$; 4) $16x^2-8x+1>0$;

5) $x^2-6x>-9$; 6) $9x^2>-6x-1$;

7) $4x^2>4x-1$; 8) $-2x^2\leqslant 4{,}5-6x$;

9) $\frac{1}{4}x^2-2x\geqslant -4$; 10) $\frac{1}{6}x^2+x\geqslant -\frac{3}{2}$.

2.28°. 1) $-x^2+2x-1\leqslant 0$; 2) $-x^2-10x-25<0$;

3) $-x^2+6x-9<0$; 4) $-4x^2-12x-9<0$;

5) $-\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{3}x-4<0$; 6) $-x^2+x-\frac{1}{4}<0$;

7) $x^4-12x^2+36>0$; 8) $16x^4-24x^2+9\leqslant 0$.

2.29. Найдите все значения x, при которых будут неположительными значения функции:

1) $y=x^2-10x+25$; 2) $y=-x^2+6x-9$;

3) $y=-\frac{1}{6}x^2-2x-6$; 4) $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-2\frac{1}{4}$.

2.30. На рисунке 83 изображен график квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$. Укажите, при каких значениях x значения y:

а) положительны; б) отрицательны;

в) неотрицательны; г) неположительны;

д) равны нулю; е) отличны от нуля.

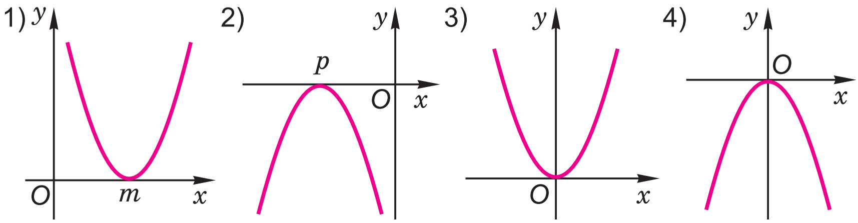


Рис. 83

2.31. Решите неравенство:

1) $(25x^2 - 10x + 1)(9 - 3x) < 0$;
2) $(49x^2 + 14x + 1)(15 - 25x) > 0$;
3) $(x^2 + 2x + 1)(-x^2 + 2x - 1)(8x + 2) < 0$;
4) $(x^2 - 8x + 16)(-4x^2 - 4x - 1)(7x - 28) > 0$;
5)* $(x^4 - 18x^2 + 81)(x^2 - 2x + 3)(0,1x + 5) > 0$;
6)* $(x^4 + 6x^2 + 9)(-x^2 + 4x - 6)(0,3x - 12) < 0$.

2.32*. При каких значениях p любое значение x является решением неравенства:

1) $x^2 + 2px + p^2 \geqslant 0$;
2) $x^2 - 2px + p^2 > 0$;
3) $px^2 + 2p^2x + p^3 < 0$;
4) $px^2 - 2p^2x + p^3 \leqslant 0$;
5) $p^2x^2 - 2p^3x + p^4 > 0$;
6) $p^3x^2 + 2p^4x + p^5 \geqslant 0$?

2.4. Квадратные неравенства с положительным дискриминантом

Рассмотрим решение неравенств вида

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$(ax^2 + bx + c \geqslant 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leqslant 0),$$

где $a > 0$; $D = b^2 - 4ac > 0$.

Пример 1. Решить неравенство

$$2x^2 + x - 6 < 0. \qquad (1)$$

Решение. Имеем:

$$D = 49 > 0; \; a = 2 > 0.$$

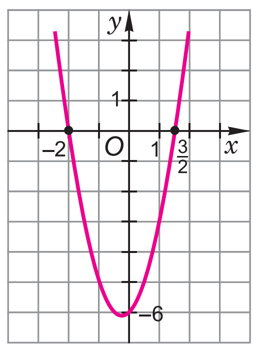


Рис. 84

Изображение параболы $y = 2x^2 + x - 6$ дано на рисунке 84. Для решения неравенства $2x^2 + x - 6 < 0$ ограничимся ее упрощенным рисунком (рис. 85). Ось Ox парабола пересекает в точках $x_1 = -2$ и

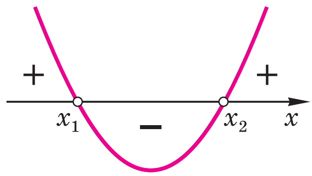


Рис. 85

$x_2 = \frac{3}{2}$, которые являются нулями функции y, т. е. корнями уравнения $2x^2 + x - 6 = 0$.

На рисунке 85 знаками «+» и «−» отмечены промежутки знакопостоянства функции y. Так как точки параболы для значений $x \in (x_1;\ x_2)$, т. е. $x \in \left(-2;\ \frac{3}{2}\right)$ расположены ниже оси Ox, то $y < 0$ и неравенство $2x^2 + x - 6 < 0$ верное. Итак, каждое значение x из промежутка $\left(-2;\ \frac{3}{2}\right)$ является решением неравенства (1).

А значения x, не принадлежащие промежутку $(x_1;\ x_2)$, т. е. $x \in (-\infty;\ x_1] \cup [x_2;\ +\infty)$, не являются решениями неравенства (1), так как соответствующие точки параболы расположены либо на оси Ox, либо выше ее; таким образом, $y \geqslant 0$, и, значит, неравенство (1) не выполняется.

Ответ: $\left(-2;\ \frac{3}{2}\right)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$-3x^2 + 2x + 5 \leqslant 0. \qquad (2)$$

Решение. Умножив обе части неравенства (2) на −1, получим равносильное ему неравенство

$$3x^2 - 2x - 5 \geqslant 0. \qquad (3)$$

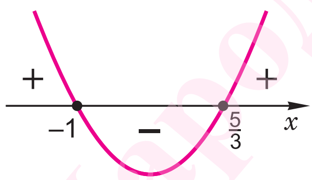


Рис. 86

Выполним упрощенный рисунок параболы $y = 3x^2 - 2x - 5$ (рис. 86).

Имеем $D = 64 > 0$; $a = 3 > 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{5}{3}$ — нули функции.

Для значений x из промежутка $(-\infty;\ -1]$ и для значений x из промежутка $\left[\frac{5}{3};\ +\infty\right)$ точки параболы расположены выше оси Ox или лежат на ней, т. е. ординаты этих точек $y \geqslant 0$, и, значит, неравенство $3x^2 - 2x - 5 \geqslant 0$ верное.

Таким образом, каждое значение x из множества $(-\infty;\ -1] \cup \left[\frac{5}{3};\ +\infty\right)$ является решением неравенства (3), а следовательно, и неравенства (2).

А значения x, не принадлежащие этому множеству, т. е. $x \in \left(-1;\ \frac{5}{3}\right)$, не являются решениями неравенства (3), так как соответствующие точки параболы расположены ниже оси Ox, т. е. ординаты этих точек $y < 0$, значит, выполняется неравенство $3x^2 - 2x - 5 < 0$.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{5}{3};\ +\infty\right)$.

Поясните, почему на рисунке 85 точки x_1 и x_2 на оси Ox отмечены светлыми кружками, а на рисунке 86 — черными.

Пример 3. Решить неравенство:

а) $x^2 - 121 \leqslant 0$; б) $x^2 - 7 > 0$.

Решение. *Способ 1.* а) Данное неравенство равносильно неравенству $x^2 \leqslant 121$, т. е. $|x| \leqslant 11$, откуда $-11 \leqslant x \leqslant 11$.

б) Неравенство $x^2 > 7$ равносильно неравенству $|x| > \sqrt{7}$, откуда

$$x < -\sqrt{7} \text{ или } x > \sqrt{7}.$$

Ответ: а) $[-11;\ 11]$; б) $\left(-\infty;\ -\sqrt{7}\right) \cup \left(\sqrt{7};\ +\infty\right)$.

Способ 2. а) Поскольку для функции $y = x^2 - 121$ имеем $a = 1 > 0$, $x_1 = -11$, $x_2 = 11$, то парабола пересекает ось Ox в двух точках x_1, x_2, и значения $y \leqslant 0$ получаем при $-11 \leqslant x \leqslant 11$, т. е. при любом $x \in [-11;\ 11]$ (рис. 87).

б) Имеем: $a = 1 > 0$, $x_1 = -\sqrt{7}$, $x_2 = \sqrt{7}$ — нули функции $y = x^2 - 7$; парабола пересекает ось Ox в точках x_1 и x_2, а значения $y > 0$ получаем при $x < -\sqrt{7}$ и при $x > \sqrt{7}$, т. е. при любом $x \in \left(-\infty;\ -\sqrt{7}\right) \cup \left(\sqrt{7};\ +\infty\right)$ (рис. 88).

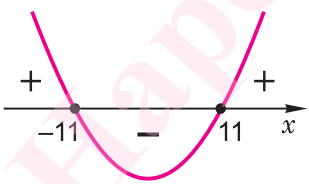


Рис. 87

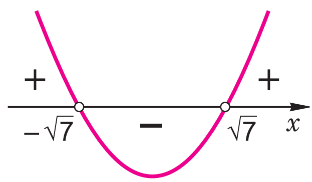


Рис. 88

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{(5 - 2x)(x - 7)}{x^2 + 49} \geqslant 0.$$

Решение. Поскольку при любом значении x значение знаменателя $x^2 + 49$ положительно, то данное неравенство равносильно неравенству $(5 - 2x)(x - 7) \geqslant 0$.

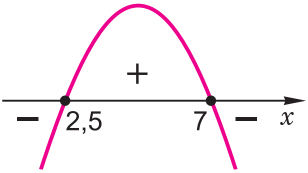


Рис. 89

Парабола $y = (5 - 2x)(x - 7)$ пересекает ось Ox в точках $x_1 = 2{,}5$, $x_2 = 7$, и ее ветви направлены вниз ($a = -2 < 0$), поэтому $y \geqslant 0$ при любом $x \in [2{,}5;\ 7]$, а значит, выполняется и данное неравенство (рис. 89).

Ответ: $[2{,}5;\ 7]$.

К решению неравенств сводится и решение некоторых уравнений.

▲ **Пример 5.** Решить уравнение:

а) $\left|x^2 - 81\right| = 81 - x^2$; б) $\left|x^2 - 5x + 4\right| = x^2 - 5x + 4$.

Решение. а) Используя определение модуля, получим неравенство, равносильное исходному уравнению (поясните почему):

$$x^2 - 81 \leqslant 0, \text{ т. е. } |x| \leqslant 9,$$

откуда $x \in [-9;\ 9]$.

б) Уравнение равносильно неравенству (поясните почему)

$$x^2 - 5x + 4 \geqslant 0.$$

Поскольку $D = 9 > 0$, $a = 1 > 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, то имеем $x \in (-\infty;\ 1] \cup [4;\ +\infty)$.

Ответ: а) $[-9;\ 9]$; б) $(-\infty;\ 1] \cup [4;\ +\infty)$. ▲

С другим способом решения квадратных неравенств с положительным дискриминантом мы познакомимся в следующем пункте.

?

1. Пусть x_1 и x_2 — нули функции $y = ax^2 + bx + c$. Верно ли, что промежуток $(x_1;\ x_2)$ является множеством решений квадратного неравенства $ax^2 + bx + c > 0$, если:

а) $a > 0$; б) $a < 0$?

2. В каком случае квадратное неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ с положительным дискриминантом имеет бесконечно много решений?

3*. Может ли решением квадратного неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ с положительным дискриминантом быть любое число?

Упражнения

2.33°. Используя схематичное изображение параболы на рисунке 90, укажите решения квадратного неравенства:

а) $ax^2 + bx + c < 0$; б) $ax^2 + bx + c \geqslant 0$.

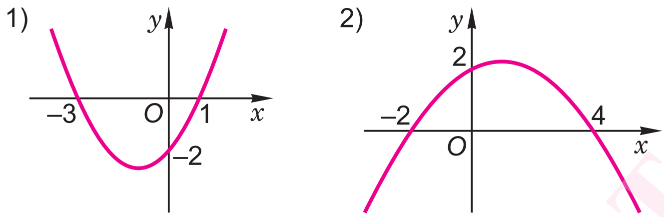


Рис. 90

Решите неравенство **(2.34—2.42).**

2.34°. 1) $x^2 + 2x - 3 < 0$; 2) $x^2 - 2x - 3 < 0$;
3) $x^2 + x - 2 > 0$; 4) $x^2 - x - 2 > 0$;
5) $3x^2 + 2x - 1 \geqslant 0$; 6) $2x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$;
7) $2x^2 - 3x - 2 \leqslant 0$; 8) $4x^2 + 3x - 1 \geqslant 0$;
9) $6x^2 + 6x - 12 < 0$; 10) $3x^2 + 6x - 45 > 0$.

2.35°. 1) $-6x^2 - x + 1 < 0$; 2) $-5x^2 + 9x - 4 > 0$;
3) $-\frac{1}{4}x^2 + 2{,}25x - 2 > 0$; 4) $-\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}x - 1 > 0$;
5) $-10x^2 + 20x + 150 \leqslant 0$; 6) $-16x^2 + 72x - 32 \geqslant 0$.

2.36. 1) $4x^2 - 49 > 0$; 2) $9x^2 - 100 < 0$;
3) $3x^2 > 15$; 4) $7x^2 \leqslant 49$.

2.37. 1) $-x^2 + 10 \geqslant 0$; 2) $-x^2 + 18 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 21 < 0$; 4) $-x^2 + 23 > 0$;
5) $15 - x^2 < 0$; 6) $95 - x^2 > 0$.

2.38. 1) $x^2 > x$; 2) $x^2 < 3x$;
3) $2x^2 < x$; 4) $16x^2 > 5x$;
5) $x^2 - 4x \leqslant 0$; 6) $x^2 - 9x \geqslant 0$;
7)* $x^3 - 2x^2 > 0$; 8)* $2x^3 - 18x^2 > 0$;
9)* $27x^2 - 3x^3 \leqslant 0$; 10)* $8x^2 - 32x^3 \geqslant 0$.

2.39. 1) $12 > 2x^2 + 5x$; 2) $3x + 2 \leqslant 5x^2$;
3) $x^2 + 105 \geqslant 22x$; 4) $x^2 - 2{,}4x > 13$;
5) $x + 8 < 3x^2 - 9x$; 6) $8x - 12 \leqslant 2x^2 - 2x$.

2.40. 1) $4x^2 + 6x > 9x^2 - 15x$;
2) $13x + 7x^2 \leqslant 5x^2 + 8x$;
3) $12x^2 - 5x \geqslant 9x^2 + 7x$;
4) $8{,}5x - 3x^2 < 3{,}5x + 2x^2$.

2.41. 1) $2x^2 - 3x + 4 > x^2 + 2x - 2$;
2) $2x^2 - 2x - 7 > x^2 + 5x - 17$;
3) $(x-5)^2 > 37 - (x-10)^2$;
4) $(x-3)^2 - (x-5)^2 + (x+4)^2 < 17x + 24$;
5) $(x-1)^2 + (x-2)^2 > (x-3)^2$;
6) $(x+4)^2 + (x+3)^2 \leqslant (x+5)^2$.

2.42. 1) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 < 0$; 2) $x^4 - 3x^3 - 4x^2 > 0$;
3) $3x^4 - x^3 - 4x^2 \geqslant 0$; 4) $6x^4 - x^3 - x^2 < 0$;
5) $-2x^4 + 10x^3 - 12x^2 > 0$; 6) $-2x^4 + 3x^3 + 5x^2 \leqslant 0$.

2.43. Найдите целые решения неравенства:

1) $\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 9} < 0$; 2) $\dfrac{x^2 + 12x + 35}{-x^2 - 7} > 0$;

3) $\dfrac{-8 - |x|}{x^2 - 5x - 6} \geqslant 0$; 4) $\dfrac{|x| + 6}{x^2 - 8x + 7} \leqslant 0$;

5) $\dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + x + 6} \leqslant 0$; 6) $\dfrac{3x^2 - 7x - 6}{6x - x^2 - 18} \geqslant 0$.

2.44*. Решите уравнение:

1) $\left|-5x^2 + 11x - 6\right| = -5x^2 + 11x - 6$;
2) $\left|x^2 - 2x - 15\right| = -x^2 + 2x + 15$;
3) $\left|2x^2 + 5x - 18\right| = -2x^2 - 5x + 18$;
4) $\left|-2x^2 - 3x + 5\right| = -2x^2 - 3x + 5$.

2.45. Найдите промежутки знакопостоянства функции:
1) $y = 3x^2 - 8x + 5$;
2) $y = -2x^2 + 5x + 3$;
3) $y = -5x^2 + 9x + 2$;
4) $y = 3x^2 + 11x - 20$.

2.46. Укажите естественную область определения выражения:

1) $\sqrt{5x^2 - 6x + 1}$; 2) $\sqrt{4 + 8x - 5x^2}$;

3) $\dfrac{2x + 7}{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}}$; 4) $\dfrac{4 - 5x}{\sqrt{2x^2 - 7x + 6}}$.

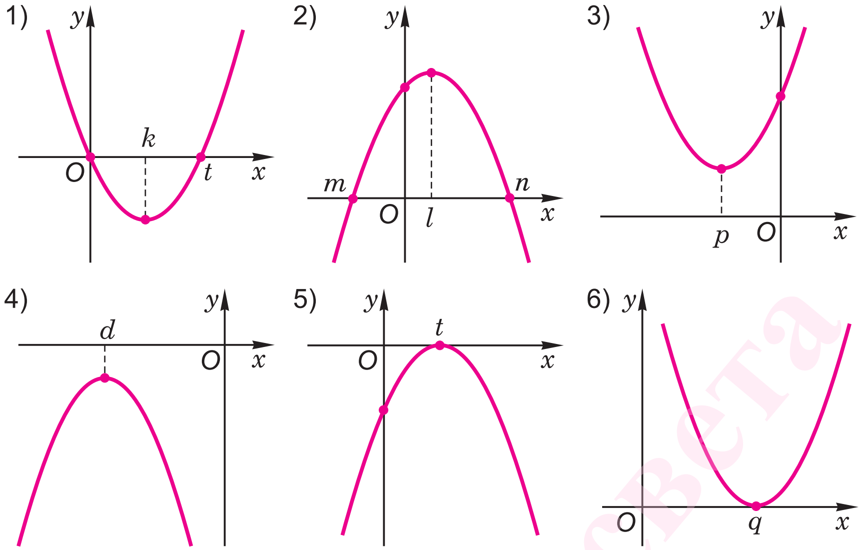


Рис. 91

2.47. На рисунке 91 изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$. Укажите, при каких значениях x значения y:

а) положительны; б) отрицательны;
в) неположительны; г) неотрицательны.

Решите неравенство **(2.48—2.49).**

2.48. 1) $(x + 5)3x - 6(x + 5) > 0$;
2) $(x - 7)5x + 8(x - 7) \leqslant 0$;
3) $(4 - x)2x + 9(4 - x) < 0$;
4) $(3 - 2x)4x - 13(3 - 2x) \geqslant 0$.

2.49*. 1) $-x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 2 > 0$;
2) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3 \geqslant 0$.

2.50*. 1) При каких значениях k неравенство

$$x^2 + 6x + 5k^2 - 6k + 1 > 0$$

верно при любых значениях x?

2) При каких значениях k неравенство

$$-x^2 - 2(k + 1)x - 9k + 5 < 0$$

верно при любых значениях x?

2.5. Решение неравенств методом интервалов

Пусть c — точка на координатной прямой. Тогда:

1) *если точка x расположена на координатной прямой слева от точки c, т. е. x меньше c, то выполняется неравенство $x - c < 0$* (рис. 92);

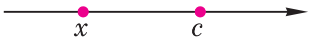


Рис. 92

2) *если точка x расположена на координатной прямой справа от точки c, т. е. x больше c, то выполняется неравенство $x - c > 0$* (рис. 93).

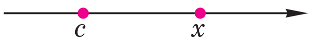


Рис. 93

Это очевидное утверждение часто позволяет выделить промежутки знакопостоянства функции, являющейся произведением нескольких линейных функций. На нем основан ***метод интервалов***, используемый при решении соответствующих неравенств.

Пример 1. Решить неравенство

$$(x + 3)(x - 2) > 0. \qquad (1)$$

Решение. Заметим, что решить неравенство (1) — это значит найти все те значения x, при которых функция $y = (x + 3)(x - 2)$ принимает положительные значения.

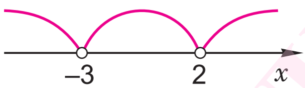


Рис. 94

На координатной прямой (рис. 94) светлыми кружками (поясните почему) отметим точки $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ — нули этой функции, т. е. корни уравнения $(x + 3)(x - 2) = 0$. Эти точки определяют три промежутка: $(-\infty; -3)$, $(-3;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$. (На рисунке 94 эти промежутки выделены дугами.)

Напомним, что числовые промежутки вида $(a;\ b)$, $(a;\ +\infty)$, $(-\infty;\ b)$ называются ***интервалами***.

Представим себе, что точка x движется по координатной прямой слева направо, и выясним, как при этом меняются знаки значений функции y.

Пока $x < -3$, т. е. пока x принадлежит интервалу $(-\infty; -3)$ (в этом случае точка x находится слева от точек -3 и 2), оба множителя $x + 3$ и $x - 2$ принимают отрицательные значения, т. е. $x + 3 < 0$ и $x - 2 < 0$. Следовательно, значение их произведения положительно:

$$y = (x + 3)(x - 2) > 0.$$

На рисунке 95 это отмечено знаком «+» слева от точки –3.

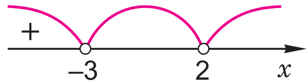


Рис. 95

После того как точка x пройдет точку –3 и окажется на интервале (–3; 2), она будет находиться справа от точки –3 и слева от точки 2. Значения первого множителя $x + 3$ будут положительными, а значения второго множителя $x - 2$ будут отрицательными:

$$x + 3 > 0 \text{ и } x - 2 < 0.$$

Следовательно,

$$y = (x + 3)(x - 2) < 0.$$

На рисунке 96 это обозначено знаком «–» между точками –3 и 2.

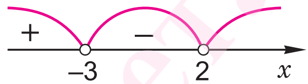


Рис. 96

И наконец, когда точка x пройдет точку 2 и окажется на интервале (2; +∞) (в этом случае точка x находится справа от точек –3 и 2), оба множителя $x + 3$ и $x - 2$ примут положительные значения:

$$x + 3 > 0 \text{ и } x - 2 > 0.$$

Следовательно,

$$y = (x + 3)(x - 2) > 0.$$

На рисунке 97 это обозначено знаком «+» справа от точки 2.

Таким образом, функция y принимает положительные значения, когда x принадлежит интервалу (–∞; –3) или когда x принадлежит интервалу (2; +∞).

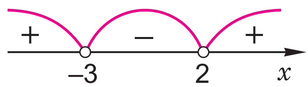


Рис. 97

О т в е т: (–∞; –3) ∪ (2; +∞).

При решении примера 1 было установлено, что на каждом из интервалов (–∞; –3), (–3; 2), (2; +∞) значения функции $y = (x + 3)(x - 2)$ имеют постоянный знак.

Напомним, что такие интервалы называются ***интервалами (промежутками) знакопостоянства функции***.

Метод, которым решался этот пример, называется ***методом интервалов***.

! При решении методом интервалов строгих неравенств, правая часть которых равна нулю, следует:

1) найти все нули функции, заданной левой частью неравенства;

2) отметить нули функции на координатной прямой, тем самым разбив ее на интервалы;

3) определить знаки значений функции на каждом из полученных интервалов (найти интервалы знакопостоянства функции);
4) выбрать интервалы, на которых значения функции имеют знак, соответствующий знаку неравенства;
5) записать ответ.

Решим этим методом еще несколько примеров.

Пример 2. Решить неравенство

$$(x+1)(x-1)(x-3)>0. \qquad (2)$$

Решение. Решить неравенство (2) — это значит найти все те значения x, при которых функция $y=(x+1)(x-1)(x-3)$ принимает положительные значения.

На координатной прямой отметим нули функции $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=3$ и выделим дугами интервалы (рис. 98).

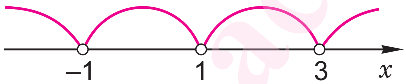


Рис. 98

Покажем, как удобно определять знаки значений функции в этих интервалах.

Выберем в одном из интервалов такое значение x, при котором проще вычислить значение y и, соответственно, определить его знак. Например, при $x=0$ найдем

$$y=(0+1)(0-1)(0-3)=1(-1)(-3)>0.$$

Поскольку $0\in(-1;\ 1)$, то над интервалом $(-1;\ 1)$ ставим знак «+» (рис. 99).

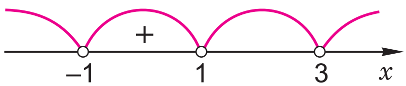


Рис. 99

Над остальными интервалами расставляем знаки («+» или «–»), учитывая, что при переходе из интервала $(-1;\ 1)$ в соседний интервал изменяется знак значений одного из сомножителей, и поэтому изменяют знак на противоположный и значения функции y. Итак, знаки в интервалах в данном примере чередуются (рис. 100). Заметим, что такое чередование знаков бывает не всегда (см. пример 3).

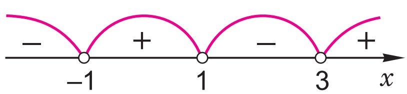


Рис. 100

Таким образом, функция y принимает отрицательные значения, когда x принадлежит интервалам $(-\infty; -1)$ и $(1; 3)$, и положительные значения, когда x принадлежит двум другим интервалам. Значит, решения неравенства (2) — это все числа из интервалов $(-1; 1)$ и $(3; +\infty)$.

Ответ: $(-1; 1) \cup (3; +\infty)$.

В тетради решение неравенства (2) записывают коротко (часто почти без слов). Например, так:

Рассмотрим функцию $y = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$. Нули функции: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$. Отметим на координатной прямой интервалы знакопостоянства функции (рис. 101) и укажем, при каких x значения $y > 0$.

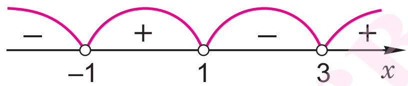


Рис. 101

Ответ: $(-1; 1) \cup (3; +\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$(x - 1)(2x^2 + 3x - 5) > 0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $y = (x - 1)(2x^2 + 3x - 5)$. Найдем ее нули, решив уравнение $y = 0$:

$$x - 1 = 0 \text{ или } 2x^2 + 3x - 5 = 0;$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = -2{,}5.$$

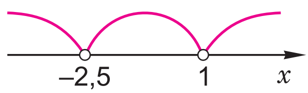


Рис. 102

Отметим на координатной прямой интервалы, ограниченные найденными нулями (рис. 102).

Знак значений функции y можно определять в какой-нибудь одной точке каждого из трех интервалов. Так, например:

при $x = -4$ получим $y = (-4 - 1)(2(-4)^2 + 3(-4) - 5) < 0$;
при $x = 0$ получим $y = (0 - 1)(2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 5) > 0$;
при $x = 2$ получим $y = (2 - 1)(2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 5) > 0$.

(Обычно вычисления такого уровня проводят устно и в решении не записывают.)

Отметим с помощью знаков «+» и «–» интервалы знакопостоянства функции (рис. 103). В ответе укажем множество всех значений x, при которых значения $y > 0$.

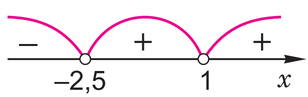


Рис. 103

Ответ: $(-2{,}5; 1) \cup (1; +\infty)$.

Заметим, что функцию $y = (x - 1)(2x^2 + 3x - 5)$ можно представить в виде $y = (x - 1)^2(2x + 5)$.
Из такой записи видно, что при переходе через точку $x = 1$ значения функции не меняют знака, поскольку множитель $(x - 1)^2$ неотрицателен при любых значениях x.

Пример 4. Решить неравенство

$$(x + 2)(2x^2 - 3x + 4) < 0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $y = (x + 2)(2x^2 - 3x + 4)$.
Найдем нули функции, решив уравнение $y = 0$:

$$x + 2 = 0 \text{ или } 2x^2 - 3x + 4 = 0.$$

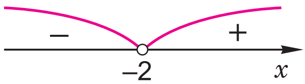


Рис. 104

Поскольку дискриминант квадратного уравнения $D < 0$, то оно корней не имеет и, значит, уравнение $y = 0$ имеет единственный корень $x = -2$.

Отметим на рисунке интервалы знакопостоянства функции y (рис. 104).

Ответ: $(-\infty; -2)$.

Пример 5. Решить неравенство

$$(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 7x + 10) \leqslant 0.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$y = (x^2 - 5x + 6)(x^2 - 7x + 10).$$

Найдем нули функции, решив уравнение $y = 0$:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ или } x^2 - 7x + 10 = 0,$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5.$$

Отметим интервалы знакопостоянства функции y (рис. 105).

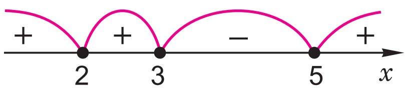


Рис. 105

Ответ: $\{2\} \cup [3; 5]$.

Поясните, почему нули функции отмечены на рисунке 105 черными кружками и почему число 2 является решением неравенства из примера 5.

Пример 6. Решить неравенство

$$(x + 1)^2(x - 2)^3(x + 3)^7 \geqslant 0.$$

Решение. Данное неравенство означает, что:

$$(x+1)^2(x-2)^3(x+3)^7=0 \text{ или } (x+1)^2(x-2)^3(x+3)^7>0.$$

Уравнение $(x+1)^2(x-2)^3(x+3)^7=0$ имеет три корня: -3; -1 и 2.

Решив неравенство $(x+1)^2(x-2)^3(x+3)^7>0$ методом интервалов, получим для функции $y=(x+1)^2(x-2)^3(x+3)^7$ интервалы ее положительных значений: $(-\infty; -3)$ и $(2; +\infty)$.

Объединив решения уравнения и неравенства, получим $x \in (-\infty; -3] \cup \{-1\} \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3] \cup \{-1\} \cup [2; +\infty)$.

▲ **Пример 7.** Решить неравенство:

а) $|x^2-9|(x^2-5x) \geqslant 0$; б) $|x^2-10x+25| > 3x-15$.

Решение. а) Данное неравенство означает, что:

$$|x^2-9|(x^2-5x)=0 \text{ или } |x^2-9|(x^2-5x)>0.$$

Уравнение $|x^2-9|(x^2-5x)=0$ имеет четыре корня: -3; 3; 0 и 5.

Неравенство $|x^2-9|(x^2-5x)>0$ равносильно (поясните почему) неравенству $x^2-5x>0$, т. е. $x(x-5)>0$, откуда $x \in (-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$.

Объединив решения уравнения и неравенства, получим $x \in (-\infty; 0] \cup \{3\} \cup [5; +\infty)$.

б) Данное неравенство равносильно неравенству $|(x-5)^2| > 3(x-5)$, откуда по определению модуля имеем $(x-5)^2 > 3(x-5)$, т. е. $(x-5)^2-3(x-5)>0$. Решая это неравенство, получаем:

$$(x-5)(x-8)>0, \text{ значит, } x \in (-\infty; 5) \cup (8; +\infty).$$

Ответ: а) $(-\infty; 0] \cup \{3\} \cup [5; +\infty)$; б) $(-\infty; 5) \cup (8; +\infty)$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt{(x-1)(x+2)} \cdot (5x-x^2)=0.$$

Решение. Рассмотрим функцию $y=\sqrt{(x-1)(x+2)} \cdot (5x-x^2)$ и найдем ее нули. Решив неравенство $(x-1)(x+2) \geqslant 0$, найдем область определения функции: $D=(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$.

Нули функции y: $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=0$, $x_4=5$, но $0 \notin D$.

Ответ: -2; 1; 5. ▲

1. Какие числовые промежутки называют интервалами?

2. Какие интервалы называют интервалами знакопостоянства функции?

3. В чем состоит метод интервалов при решении строгих неравенств?

Упражнения

Решите методом интервалов неравенство **(2.51—2.54).**

2.51°. 1) $(x+2)(x-3)>0$; 2) $(x-5)(x+4)<0$;

3) $(x-5)(x-6)\leqslant 0$; 4) $(x-2)(x-6)>0$;

5) $(x-7)\left(x+\frac{1}{8}\right)<0$; 6) $(x-5)(x-8{,}5)\leqslant 0$;

7) $(x-3{,}7)(x-4{,}8)\geqslant 0$; 8) $(x-12{,}3)(x-3{,}6)\geqslant 0$.

2.52°. 1) $(x+3)(x-4)(x-1{,}5)<0$;

2) $(x+5)(x+20)(x-15)>0$;

3) $x(x-1)(x-2)(x-5)>0$;

4) $x(x+2)(x+3)(x+6)<0$;

5) $(x-0{,}5)(x+1{,}2)(x-3{,}6)\leqslant 0$;

6) $(x+6{,}8)(x-2{,}7)(x+9{,}8)\geqslant 0$;

7) $(x+11{,}5)(x-7{,}1)(x-9{,}9)\geqslant 0$;

8) $(x-4{,}8)(x+2{,}9)(x+3{,}1)\leqslant 0$.

2.53.° 1) $-(x+4{,}2)(x+6{,}4)<0$; 2) $-(x-0{,}8)(x-4)>0$;

3) $-\left(x+\frac{3}{8}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)>0$; 4) $-\left(x-\frac{7}{9}\right)\left(x+\frac{5}{8}\right)<0$;

5) $25(x-12)(x+10)\geqslant 0$; 6) $-13(x-8)(x-2)\leqslant 0$;

7) $-2\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{8}\right)\leqslant 0$; 8) $-14(x+6)(x-1)\geqslant 0$;

9) $-10\left(x-\frac{4}{5}\right)(x-0{,}7)\leqslant 0$;

10) $-34(x-2{,}7)\left(x-2\frac{3}{5}\right)\geqslant 0$.

2.54. 1)° $(3x-5)(x+1)\geqslant 0$;

2)° $(x-3)(5x-10)<0$;

3)° $-(6x+5)(x-12)\geqslant 0$;

4)° $-(2x-8)(x+7)\leqslant 0$;

5) $(8x+4)(3-x)(8+2x)>0$;

6) $(15x-5)(6-x)(1+10x)<0$;

7) $-2x(7x+49)(5x+8{,}5)\geqslant 0$;

8) $-5x(8-2x)(4x-0{,}5)\leqslant 0$.

2.55. Найдите естественную область определения выражения:

1) $\sqrt{(x-3)(8-2x)}$; 2) $\sqrt{(14x+7)(4-10x)}$;

3) $\sqrt{x(0{,}1x+1)(6-2x)}$; 4) $\sqrt{(8-16x)(x-9)x}$;

5) $\dfrac{x-9}{\sqrt{(x-4)(x-1)(x-3)x}}$; 6) $\dfrac{25x-3}{\sqrt{(x+1)(x-5)(x+3)x}}$.

2.56. При каких значениях x произведение:

1) $(3x-9)(2x-10)(4x-12)$ неотрицательно;
2) $(2x-1)(4x+16)(5x-10)$ отрицательно;
3) $(7x-49)(2x+4)(6x-12)(3x-1)$ неположительно;
4) $(5x+25)(4x-1)(1-x)x$ положительно?

2.57. 1) При каких положительных значениях x верно неравенство $x^2-2x \leqslant 2$?
2) При каких отрицательных значениях x верно неравенство $x^2+2x \leqslant 1$?

2.58. 1) Найдите решения неравенства $0{,}8x^2 \leqslant x+0{,}3$, принадлежащие промежутку $[0{,}2; 3]$.
2) Найдите решения неравенства $0{,}6x^2 \leqslant 0{,}5-1{,}3x$, принадлежащие промежутку $[-0{,}4; 2]$.

Решите неравенство **(2.59—2.61)**.

2.59.° 1) $4x(x+2) < 5$; 2) $4x(x-1) > 3$;
3) $(x-3)^2 > 9-x^2$; 4) $4-x^2 > (2+x)^2$;
5) $(x-2)(2+x) < 3x^2-8$; 6) $2x^2-6 < (3-x)(x+3)$;
7) $\dfrac{2x^2+x}{2} > \dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{6}$; 8) $\dfrac{2x^2-x}{2} > \dfrac{3x}{5}-\dfrac{3}{10}$.

2.60. 1)° $x^2+8x \geqslant 0$; 2)° $5x^2-x < 0$;
3)° $x^2-12x < 0$; 4)° $x^2+7x \geqslant 0$;
5) $x^3+x^2-12x \leqslant 0$; 6) $x^3-2x^2-3x > 0$;
7) $4x^3-4x^2-3x > 0$; 8) $2x^3-3x^2-2x \geqslant 0$;
9) $-x^3+2x^2+15x \leqslant 0$; 10) $-2x^3+7x^2-6x < 0$.

2.61. 1)° $8x-4x^2 \leqslant 0$; 2)° $3x^2-3x < 0$;
3) $2x^3+13x^2-7x < 0$; 4) $6x^3-13x^2+5x > 0$;
5) $-9x^3+12x^2-4x > 0$; 6) $-2x^3-5x^2+18x < 0$;
7) $-5x^3+11x^2-6x > 0$; 8) $-25x^3-30x^2-9x \leqslant 0$;
9) $-10x^3+9x^2 < 0$; 10) $-2x^3+7x > 0$.

2.62. При каких значениях x произведение:

1) $(x+6)^2(x-1)$ положительно;
2) $(x-3)^2(x+4)$ отрицательно;
3) $(x+9)^2(x-7)(x+5)$ неположительно;
4) $(x-1{,}4)(x+13)^2(x+2{,}7)$ неотрицательно?

Решите неравенство **(2.63—2.65)**.

2.63. 1)° $(x^2+5)(x+9)(x-4)>0$;
2)° $(x^2+17)(x-3)(x+2)<0$;
3) $(x-7)^2(x-6)x>0$;
4) $(x-1)^2(x-12)2x<0$;
5) $(x^2+10)(x^2-9)<0$;
6) $(x^2+25)(x^2-16)>0$;
7) $(5+6x^2)^3(x^2-8)\geqslant 0$;
8) $(14+2x^4)(x^2-12)\leqslant 0$.

2.64. 1) $(x+8{,}2)(x^2-4)\geqslant 0$;
2) $(x-4{,}9)(x^2-9)\leqslant 0$;
3) $(x^2-1{,}9x)(x^2+16)<0$;
4) $(x^2+2{,}8x)(x^2+2{,}2)>0$;
5) $(x-0{,}8)^2(x^2-0{,}64)<0$;
6) $(x+2{,}1)^2(x^2-0{,}01)>0$;
7) $(x^2-16x+64)(x^2-13)\leqslant 0$;
8) $(x^2-17)(x^2+25-10x)\leqslant 0$;
9) $(2x^2+3x+4)(x+5)\geqslant 0$;
10) $(6x-9)(-17+6x-x^2)\geqslant 0$.

2.65. 1) $(x^2+10x+25)(3x^2-2x-1)\geqslant 0$;
2) $(16x^2+1-8x)(x^2+8-6x)<0$;
3) $(x^2+5x)^2(7x^2-2-5x)\geqslant 0$;
4) $(x^4+9x^2-6x^3)(5x^2+6x+1)\leqslant 0$;
5) $(x-7)^2(x^2-2x-3)>0$;
6) $(x^2-4)^2(x^2-x-12)<0$;
7) $(x^4-9x^2)(x^2-4x-5)>0$;
8) $(16x-x^3)(25-x^2)\leqslant 0$.

2.66. 1) Дана функция $y=(x-5)^3(x-1)^4x^2$. Найдите все значения x, при которых:

а) $y<0$; б) $y>0$; в) $y\leqslant 0$;
г) $y\geqslant 0$; д) $y=0$; е) $y\neq 0$.

2) Дана функция $y=(x+1)^4(x+2)^3x^2(x+1)$. Найдите все значения x, при которых:

а) $y>0$; б) $y\geqslant 0$; в) $y<0$;
г) $y\leqslant 0$; д) $y=0$; е) $y\neq 0$.

2.67. Решите неравенство:

1) $(x^2+5x)(x^2+6x+5)(x^2-7x) \geqslant 0$;
2) $(x^2-9x)(x^2+7x+12)(x^2+4x) \leqslant 0$;
3) $x(x^2-4)(x^2+2x-8)(x^2+7x+10) \leqslant 0$;
4) $x(x^2-9)(x^2-5x+6)(x^2+3x) \geqslant 0$.

2.68*. 1) При каких значениях p уравнение

$$2px^2-(p+3)x+2=0$$

имеет два различных корня?

2) При каких значениях a неравенство

$$x^2+2(a-3)x+5a-9>0$$

выполняется при любых значениях x?

Решите неравенство **(2.69—2.73).**

2.69. 1) $(x-2)^2(x^2-5)<(x-2)^2(16-4x)$;
2) $(x-5)^4(x^2-8)(x-1)<(x^2-3x+2)(x-5)^4$;
3) $(x-4)^3(x+6)(6x+45)<(x-4)^3(x-6)^2$;
4) $(x-7)^3(x^2-12x+36) \geqslant (x-7)^3(6-x)$.

2.70*. 1) $\left|x^2+4x\right|>5$; 2) $\left|x^2+5x\right|<6$;
3) $\left|4x^2-x-1\right| \leqslant 2$; 4) $\left|2x^2-7x+9\right| \geqslant 3$.

2.71*. 1) $x^2-|x|-90<0$; 2) $x^2-5|x|+6 \geqslant 0$;
3) $7|x|-2x^2-6 \geqslant 0$; 4) $20+11|x|-3x^2<0$.

2.72*. 1) $\left|x^2-25\right|(x^2-4) \leqslant 0$;
2) $\left|x^2-16\right|(x^2-49) \geqslant 0$;
3) $\left|x^2-1\right|(x^2-7x+12)>0$;
4) $\left|x^2-4\right|(x^2-x-12)<0$;
5) $\left|x^2-36\right|(x^2+|x|-30) \geqslant 0$;
6) $\left|x^2-64\right|(x^2+11|x|+30) \leqslant 0$.

2.73*. 1) $\left|x^2+4x+4\right|<5x+10$;
2) $\left|x^2-16x+64\right|>4x-32$;
3) $x^2-6x+9>3|x-3|$;
4) $x^2+20x+100<|7x+70|$.

2.74*. Решите уравнение:

1) $\sqrt{9-x^2}\cdot(x^2-6x-7)=0$;

2) $\sqrt{4-x^2}\cdot(x^2-5x+4)=0$;

3) $\sqrt{7+6x-x^2}\cdot(x^2-36)=0$;

4) $\sqrt{7x+8-x^2}\cdot(x^2-25)=0$;

5) $\sqrt{(x+2)(x+4)(x-1)}\cdot(x^3+5x^2+6x)=0$;

6) $\sqrt{(x-3)(x-5)(x-8)}\cdot(x^3-6x^2-7x)=0$.

2.6. Системы неравенств с одной переменной

Напомним некоторые сведения о системе неравенств.

Пусть надо найти все такие значения переменной x, которые являются решениями каждого из неравенств

$$2x \geqslant 5 \quad \text{и} \quad 3x-1<14.$$

В этом случае говорят, что надо ***решить систему неравенств***

$$\begin{cases} 2x \geqslant 5, \\ 3x-1<14 \end{cases}$$

(здесь фигурная скобка заменяет союз «и»).

Записанная система — это пример системы из двух линейных неравенств с одной переменной (с одним неизвестным).

Приведем пример системы из линейного и квадратного неравенств с одной переменной:

$$\begin{cases} -4x \geqslant 15, \\ 3x^2-4x-15<0. \end{cases}$$

Определение. **Пусть надо решить систему из двух неравенств с одной переменной x. Значения переменной x, которые являются решениями каждого неравенства системы, называются *решениями* этой *системы*.**

Решить систему неравенств **— это значит найти все ее решения или доказать, что их нет.**

Определение. **Две системы неравенств называются *равносильными*, если каждое решение первой системы является решением второй системы и, наоборот — каждое решение второй системы является решением первой системы, т. е. если они имеют одни и те же решения.**

Равносильными называются и системы неравенств, которые не имеют решений.

Покажем на примерах, как находят решения системы неравенств с одной переменной и как эти решения изображаются на координатной прямой.

Пример 1. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x \geqslant 5, \\ 3x - 1 < 14. \end{cases} \qquad (1)$$

Решение. Решив каждое из неравенств системы (1), получим равносильную ей систему

$$\begin{cases} x \geqslant 2{,}5, \\ x < 5. \end{cases}$$

Решениями этой системы являются те значения переменной x, для которых верны оба неравенства: $x \geqslant 2{,}5$ и $x < 5$. А это, как мы знаем, записывается двойным неравенством:

$$2{,}5 \leqslant x < 5.$$

Ответ: $2{,}5 \leqslant x < 5$.

Используя обозначения для числовых промежутков, ответ, полученный при решении системы (1), можно записать и так:

$$[2{,}5;\ 5).$$

На рисунке 106 изображены решения неравенства $x \geqslant 2{,}5$ — это все значения x, расположенные справа от точки 2,5, и само число 2,5. Неравенство нестрогое, поэтому число 2,5 также является его решением; на рисунке оно отмечено черным кружком.

На рисунке 107 изображены решения неравенства $x < 5$ — это все значения x, расположенные слева от точки 5. Неравенство строгое, поэтому число 5 не является его решением; на рисунке оно отмечено светлым кружком.

Рис. 106

Рис. 107

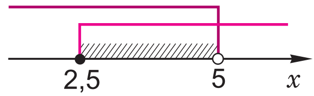


Рис. 108

На рисунке 108 изображены решения обоих неравенств $x \geqslant 2{,}5$ и $x < 5$, а те значения переменной x, которые являются решениями и одного, и другого неравенства, отмечены штриховкой, т. е. штриховкой выделены решения системы (1). Обратите внимание, что заштрихованным оказался тот участок координатной прямой, который размещен сразу под двумя линиями, отмечающими решения отдельных неравенств системы.

Заметим, что система (1) решается настолько просто, что для ее решения нет необходимости обращаться к рисунку. А вот при решении следующих примеров рисунок уже оказывает существенную помощь.

Пример 2. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} -2x \geqslant 0{,}5, \\ 3x^2 - 4x - 15 < 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решение. Решив первое неравенство системы (2), получим

$$x \leqslant -0{,}25.$$

Решения этого неравенства изображены на рисунке 109.

Решим второе неравенство системы (2):

$$3x^2 - 4x - 15 < 0;$$

$$3(x-3)\left(x+\frac{5}{3}\right) < 0;$$

$$-\frac{5}{3} < x < 3.$$

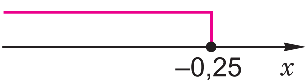


Рис. 109

Решения этого неравенства изображены на рисунке 110.

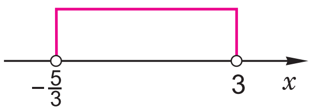


Рис. 110

Теперь на одном рисунке линиями на двух разных уровнях над координатной прямой изобразим решения обоих неравенств системы (2). Те значения переменной x, которые являются решениями и одного, и другого неравенства, т. е. являются решениями системы (2), отметим штриховкой (рис. 111).

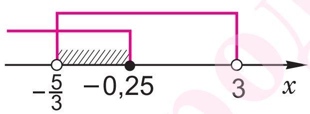


Рис. 111

Значит, решения данной системы — это $-\frac{5}{3} < x \leqslant -0{,}25$.

Ответ: $\left(-\frac{5}{3}; -0{,}25\right]$.

Решение системы (2) можно оформить так:

Решение.

$$\begin{cases} -2x \geqslant 0{,}5, \\ 3x^2 - 4x - 15 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant -0{,}25, \\ -\frac{5}{3} < x < 3 \end{cases} \quad \text{(см. рис. 111);}$$

$$-\frac{5}{3} < x \leqslant -0{,}25.$$

Ответ: $\left(-\frac{5}{3};\ -0{,}25\right]$.

Пример 3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3x - 1 < 14, \\ |x| > 3. \end{cases} \qquad (3)$$

Решение. Решим первое неравенство системы (3) и изобразим его решения $x < 5$ (рис. 112).

Рис. 112

Решим второе неравенство системы (3):

$$|x| > 3;$$

$$x < -3 \text{ или } x > 3.$$

Изобразим его решения (рис. 113; обе линии размещены на одном уровне, так как ими отмечены решения одного неравенства $|x| > 3$).

Рис. 113

Теперь на одном рисунке линиями на двух разных уровнях над координатной прямой изобразим решения обоих неравенств системы (3). Решения системы (3) выделим штриховкой — это значения x, которые входят в решения каждого из двух неравенств данной системы (они находятся на рисунке 114 под линиями двух уровней).

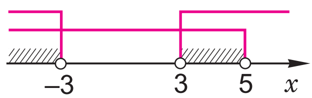


Рис. 114

Значит, решение системы (3) — это те значения x, которые удовлетворяют неравенству $x < -3$, и те значения x, которые удовлетворяют неравенству $3 < x < 5$.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (3; 5)$.

Решение системы (3) можно оформить так:

Решение.
$$\begin{cases} 3x - 1 < 14, \\ |x| > 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 5, \\ (x < -3 \text{ или } x > 3) \end{cases} \quad \text{(см. рис. 114);}$$

$$x < -3 \text{ или } 3 < x < 5.$$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (3; 5)$.

В системе может содержаться и более двух неравенств с одной переменной.

Пример 4. Решить систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x \geqslant 5, \\ 3x^2 - 4x - 15 < 0, \\ |x| > 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x \geqslant 5, \\ 3x^2 - 4x - 15 < 0, \\ |x| < 3. \end{cases}$

Решение. а) Данная система равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 2{,}5, \\ -\frac{5}{3} < x < 3, \\ (x < -3 \text{ или } x > 3). \end{cases}$$

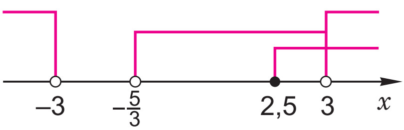


Рис. 115

На рисунке 115 видно, что эта система не имеет решений.

б) Данная система равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 2{,}5, \\ -\frac{5}{3} < x < 3, \\ -3 < x < 3. \end{cases}$$

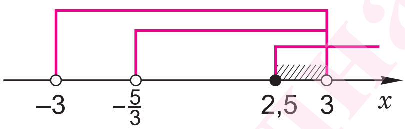


Рис. 116

На рисунке 116 видно, что решениями системы являются значения x, удовлетворяющие неравенству

$$2{,}5 \leqslant x < 3.$$

Ответ: а) нет решений; б) [2,5; 3).

Заметим, что решение многих неравенств можно свести к решению систем более простых неравенств.

Например, решение неравенства $\frac{x^2 - 5x + 6}{3x - 15} \leqslant 0$ можно заменить решением равносильной ему совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \leqslant 0, \\ 3x - 15 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geqslant 0, \\ 3x - 15 < 0. \end{cases}$$

Однако метод интервалов дает возможность более рационального решения таких неравенств.

▲ **Пример 5.** Решить неравенство:

а) $(2x-5)\sqrt{x^2-x-6} \geqslant 0;$ б) $(4-x)\sqrt{x^2-2x-3} \leqslant 0.$

Решение. а) Данное неравенство означает, что:

$$(2x-5)\sqrt{x^2-x-6} = 0 \text{ или } (2x-5)\sqrt{x^2-x-6} > 0.$$

Уравнение $(2x-5)\sqrt{x^2-x-6} = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases}(2x-5=0 \text{ или } x^2-x-6=0),\\ x^2-x-6 \geqslant 0.\end{cases}$$

Откуда имеем:

$$\begin{cases}(x=2{,}5 \text{ или } x=-2 \text{ или } x=3),\\ x \in (-\infty;\ -2] \cup [3;\ +\infty),\end{cases} \text{ т. е. } x \in \{-2;\ 3\}.$$

Неравенство $(2x-5)\sqrt{x^2-x-6} > 0$ равносильно системе $\begin{cases}2x-5>0,\\ x^2-x-6>0,\end{cases}$ откуда $x > 3$, т. е. $x \in (3;\ +\infty)$.

Объединив решения уравнения и неравенства, получим $x \in \{-2\} \cup [3;\ +\infty)$.

б) Решая это неравенство аналогично неравенству а), получим, что $x \in \{-1;\ 3\} \cup [4;\ +\infty)$ (убедитесь в этом).

Ответ: а) $\{-2\} \cup [3;\ +\infty)$; б) $\{-1;\ 3\} \cup [4;\ +\infty)$.

Пример 6. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}(2x-5)\sqrt{x^2-x-6} \geqslant 0,\\ (4-x)\sqrt{x^2-2x-3} \leqslant 0.\end{cases}$$

Решение. Решением данной системы неравенств будут те значения переменной x, которые являются решением каждого из неравенств системы (см. пример 5). Соответственно, получим $x \in \{3\} \cup [4;\ +\infty)$.

Ответ: $\{3\} \cup [4;\ +\infty)$. ▲

?

1. Что называется решением системы неравенств с одной переменной?
2. Что значит решить систему неравенств?
3. Какие две системы неравенств называются равносильными?

Упражнения

2.75°. На рисунке 117 линиями на разных уровнях изображены решения неравенств некоторой системы. Перенесите рисунок в тетрадь и отметьте на нем штриховкой решения системы неравенств (если решения есть). Определите число неравенств в этой системе и укажите ответ.

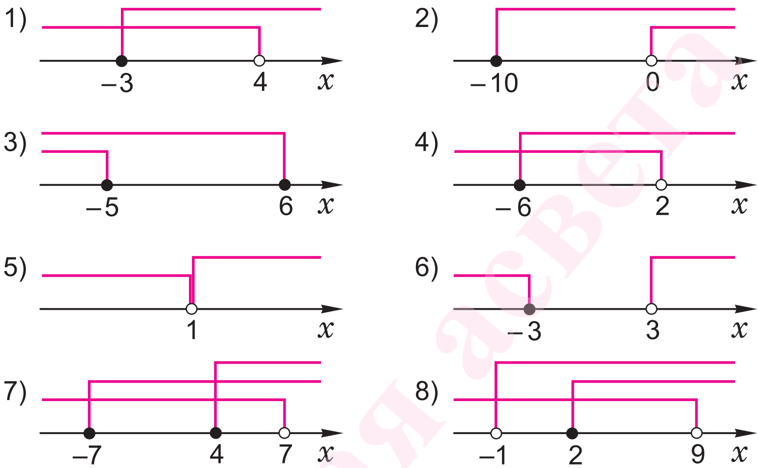


Рис. 117

2.76°. Составьте какую-нибудь систему неравенств, поиск решения которой можно проиллюстрировать рисунком, полученным при выполнении упражнения **2.75**.

2.77°. Составьте какую-нибудь систему двух линейных неравенств, решением которой является промежуток:

1) $(-3;\ 0{,}5]$; 2) $(-\infty;\ 1)$;
3) $[-7;\ 2{,}4]$; 4) $[8;\ +\infty)$.

2.78°. Составьте какую-нибудь систему трех линейных неравенств, решением которой является промежуток:

1) $[-2;\ 12]$; 2) $(-\infty;\ 4]$;
3) $[1;\ 16]$; 4) $(2;\ +\infty)$.

Решите систему неравенств **(2.79—2.80)**.

2.79°. 1) $\begin{cases} 3x + 4 \leqslant 5, \\ -5x - 3 > 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x > -28, \\ 7 \leqslant -2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x > 3, \\ 2x + 6 \leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x \geqslant -1, \\ 12x + 24 < 6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x > 0, \\ -5x > 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x < 9, \\ 2x - 6 < 0. \end{cases}$

2.80. 1) $\begin{cases} 3x + 4 \leqslant 5, \\ -5x - 3 > 1, \\ |x| \geqslant 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x > -28, \\ 7 \leqslant -2x, \\ |x| \geqslant 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x > 3, \\ 2x + 6 \leqslant 0, \\ |x| \leqslant 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x \geqslant -1, \\ 12x + 24 < 6, \\ |x| \leqslant 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x \geqslant 0, \\ -5x > 0, \\ |x| \geqslant 4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x < 9, \\ 2x - 6 < 0, \\ |x| \leqslant 2. \end{cases}$

2.81. 1) Укажите наибольшее целое значение x, которое является решением системы неравенств

$$\begin{cases} 5x + 10 < 1{,}5x + 20, \\ 3x + 4 < 2x + 16. \end{cases}$$

2) Укажите наименьшее целое значение x, которое является решением системы неравенств

$$\begin{cases} (x + 2)(2 - x) < (x + 3)(4 - x), \\ \dfrac{3 + x}{4} + \dfrac{1 - 2x}{6} \leqslant 1. \end{cases}$$

3) Укажите натуральные значения x, которые являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x}{8} - \dfrac{5x - 4}{12} < \dfrac{x - 2}{6} - \dfrac{x + 1}{3} - \dfrac{3x}{4} + 6, \\ x - \dfrac{x - 1}{2} > \dfrac{x - 3}{4} + \dfrac{x + 2}{3}. \end{cases}$$

Решите систему неравенств **(2.82—2.90)**.

2.82. 1) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ 2x - 1 > 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ 3x + 1 \leqslant 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ 5x < -15; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ 4x + 6 \leqslant -2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ 6x - 5 > 7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ 3x - 4 \geqslant 5. \end{cases}$

2.83. 1) $\begin{cases} 3x > -6, \\ x^2 - 16 \leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -5x > 1, \\ x^2 - 16 \leqslant 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 7x \geqslant 2{,}8, \\ x^2 - 16 \leqslant 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - 8 > 0, \\ x^2 - 16 \leqslant 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x + 10 > 0, \\ x^2 - 16 \leqslant 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x \leqslant 18, \\ x^2 - 16 \leqslant 0. \end{cases}$

2.84. 1) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0, \\ 0{,}5x - 1 \leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0, \\ -4x > 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0, \\ \frac{1}{3}x - 4 \leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 > 0, \\ \frac{3}{7}x + 3 \leqslant 0. \end{cases}$

2.85. 1) $\begin{cases} -x^2 + 6x - 8 \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}x - 3{,}5 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -x^2 + 6x - 8 \geqslant 0, \\ 4x - 9 \leqslant 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -x^2 + 6x - 8 \geqslant 0, \\ 0{,}2x + 5 \leqslant 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -x^2 + 6x - 8 \geqslant 0, \\ -2x - 6 \leqslant 3. \end{cases}$

2.86. 1) $\begin{cases} -3x^2 + 4x - 1 < 0, \\ 2x + 9 > 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -3x^2 + 4x - 1 < 0, \\ 4x - 1 \leqslant 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -3x^2 + 4x - 1 < 0, \\ 5x + 8 \leqslant -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -3x^2 + 4x - 1 < 0, \\ \frac{1}{6}x + 1 > 3. \end{cases}$

2.87. 1) $\begin{cases} x^2 - 8x + 15 > 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 8x + 15 > 0, \\ x < 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -x^2 + 8x - 15 > 0, \\ 4x \geqslant 16; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -x^2 + 8x - 15 < 0, \\ -2x \geqslant 10. \end{cases}$

2.88. 1) $\begin{cases} -x^2 + 4x - 7 < 0, \\ x + \frac{x}{2} \leqslant 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -x^2 + 4x - 7 < 0, \\ \frac{x}{2} - \frac{x}{3} < 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 4x + 7 > 0, \\ (x - 1)(x - 2) \leqslant x(x - 1); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -x^2 + 4x - 7 < 0, \\ (x - 1)^2 \geqslant (x - 1)(x + 1). \end{cases}$

2.89. 1) $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 5 < 0, \\ x + 4 > 2x - 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 5 < 0, \\ 2x + 5 < 5x + 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -2x^2 + 3x - 5 \geqslant 0, \\ 2x - 6 < 3x - 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -2x^2 + 3x - 5 \geqslant 0, \\ 5 - \frac{x}{2} \geqslant 1. \end{cases}$

2.90. 1) $\begin{cases} \frac{7 - 2x}{5} < \frac{x}{2} + 1, \\ -3x^2 + 8x + 3 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{3x + 1}{4} \geqslant \frac{5}{3}x + \frac{1}{2}, \\ 6x^2 + x - 2 \geqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x + 4}{2} - \frac{4 - 3x}{4} < \frac{1}{6}, \\ 3x^2 + 7x - 6 \leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{7x - 2}{3} - \frac{5x + 1}{2} \leqslant -1, \\ 4x^2 - 7x - 2 > 0. \end{cases}$

2.91. 1) Укажите все целые значения x, которые являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 14 < 0, \\ x - 4 < 0. \end{cases}$$

2) Укажите наибольшее целое отрицательное значение x, которое является решением системы неравенств

$$\begin{cases} x(x + 5) > 6, \\ 1 - \frac{x}{3} > 0{,}1 - 0{,}25x. \end{cases}$$

Решите систему неравенств (**2.92—2.93**).

2.92. 1) $\begin{cases} (x - 1)^2 \geqslant 4, \\ x^2 - 8x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x - 1)^2 \leqslant 4, \\ x^2 - 8x < 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x - 1)^2 < 4, \\ x^2 - 8x \geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x - 1)^2 > 4, \\ x^2 - 8x < 0. \end{cases}$

2.93. 1) $\begin{cases} 2 + 9x - 5x^2 \geqslant 0, \\ 3x^2 - 2x - 1 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2 + 9x - 5x^2 < 0, \\ 3x^2 - 2x - 1 \leqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2 + 9x - 5x^2 \leqslant 0, \\ 3x^2 - 2x - 1 > 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2 + 9x - 5x^2 < 0, \\ 3x^2 - 2x - 1 \geqslant 0. \end{cases}$

2.94. 1) Укажите все целые значения x, которые являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 5 < 0, \\ x^2 + 4x + 3 > 0. \end{cases}$$

2) Укажите сумму целых значений x, которые являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x^2 - 3x > 0. \end{cases}$$

Укажите естественную область определения выражения **(2.95—2.96).**

2.95. 1) $\sqrt{9 - x^2} + \sqrt{x - 2}$;   2) $\sqrt{x - 4} + \sqrt{25 - x^2}$;

3) $\dfrac{\sqrt{x^2 - 2}}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}$;   4) $\dfrac{\sqrt{2x^2 - 10}}{\sqrt{x^2 + x - 72}}$;

5) $\dfrac{\sqrt{3 - x^2}}{\sqrt{x^2 - 2x - 80}}$;   6) $\dfrac{\sqrt{5 - x^2}}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$.

2.96. 1) $\sqrt{24 - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x - 20}}$;

2) $\sqrt{6 + x - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$;

3) $\sqrt{x^2 - 2x - 7} \cdot \sqrt{4 - x}$;

4) $\sqrt{3x^2 + 10x + 3} \cdot \sqrt{x^2 - 7x + 10}$.

Решите систему неравенств **(2.97—2.100).**

2.97. 1) $\begin{cases} \sqrt{x - 2} \geqslant 0, \\ x - 5 \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x - 1} \geqslant 0, \\ 2x - 8 < 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{x - 3} \leqslant 0, \\ x^2 - 8x + 12 < 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{x + 5} \leqslant 0, \\ x^2 + 3x - 18 \geqslant 0. \end{cases}$

2.98. 1) $\begin{cases} |x + 4| > 2, \\ x^2 + 8x + 7 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x - 3| < 8, \\ x^2 - 6x - 27 \geqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} |x^2 - 16| \leqslant 0, \\ x^2 - 16x - 17 \geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} |x^2 - 9| \geqslant 0, \\ 2x - 5 > 0. \end{cases}$

2.99. 1) $\begin{cases} x^4 - 5x^2 - 36 \geqslant 0, \\ x^2 + x - 2 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^4 - 5x^2 - 36 \leqslant 0, \\ x^2 + x - 2 < 0. \end{cases}$

2.100. 1) $\begin{cases} x^2 > 0, \\ x^2 + 5x + 6 \geqslant 0, \\ x^4 - 5x^2 - 36 \leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 \leqslant 0, \\ x^2 + 5x + 6 > 0, \\ x^4 - 5x^2 - 36 > 0. \end{cases}$

2.101*. При каких значениях a система неравенств имеет хотя бы одно решение:

1) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 4, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

2.102*. При каких значениях b система неравенств не имеет решений:

1) $\begin{cases} x > 2, \\ x < b; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 8, \\ x \geqslant b? \end{cases}$

2.103*. При каких значениях c решением системы неравенств $\begin{cases} x > 3, \\ x \geqslant c \end{cases}$ является промежуток:

1) $(3; +\infty)$; 2) $[4; +\infty)$?

2.104*. При каких значениях p существует ровно три целых числа, являющихся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < p; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 5, \\ x \geqslant p? \end{cases}$

2.105. 1) Если к 0,5 суммы двух последовательных натуральных чисел прибавить $\frac{1}{3}$ меньшего числа, то получится число меньше 12, а если из $\frac{1}{3}$ суммы этих чисел вычесть 0,5 большего числа, то получится число больше 1. Найдите эти числа.

2) Произведение четного натурального числа и его половины больше 17, но меньше 25. Найдите это число.

3) Если к квадрату натурального числа, увеличенного на единицу, прибавить один, то полученная сумма будет больше 10, а если прибавить 5, то полученная сумма будет меньше 30. Найдите натуральное число.

4) Если квадрат натурального числа, уменьшенного на единицу, увеличить на 4, то полученная сумма будет больше 13, а если уменьшить на 5, то полученная сумма будет меньше 20. Найдите натуральное число.

2.106. Решите неравенство:

1) $(x-2)\sqrt{x^2-5,5x+6} \geqslant 0$;

2) $(8-x)\sqrt{x^2+0,5x-3} \leqslant 0$;

3) $(x-4)\sqrt{x^2-7,5x+11} \geqslant 0$;

4) $(3-x)\sqrt{x^2+0,5x-5} \leqslant 0$.

2.107*. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases}(x-3)\sqrt{x^2-8,5x+15} \geqslant 0, \\ (5-x)\sqrt{x^2+2,5x-6} \leqslant 0;\end{cases}$

2) $\begin{cases}(x-5)\sqrt{x^2-8,5x+13} \geqslant 0, \\ (7-x)\sqrt{x^2+0,5x-14} \leqslant 0.\end{cases}$

2.7. Рациональные уравнения

Определение. Уравнения вида

$$\frac{A}{B}=0,$$

где A и B — многочлены от одной и той же переменной, называются *рациональными*.

Рациональные уравнения называют еще *уравнениями, содержащими переменную* (*неизвестное*) *в знаменателе.*

Рациональное уравнение $\frac{A}{B}=0$ равносильно системе

$$\begin{cases}A=0; \\ B\neq 0.\end{cases}$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=2-\frac{1}{x^2-3x+2}. \qquad (1)$$

Решение. Разложим квадратный трехчлен x^2-3x+2 на множители:

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2).$$

Таким образом, уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=2-\frac{1}{(x-1)(x-2)}.$$

Умножив обе части этого уравнения на выражение $(x-1)(x-2)$, получим уравнение-следствие

$$x-2+x-1=2(x-1)(x-2)-1.$$

После преобразований это уравнение примет вид $x^2 - 4x + 3 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Так как в процессе решения обе части уравнения умножали на выражение, содержащее переменную, и могли получить уравнение, не равносильное данному, то необходима проверка.

Проверка. При $x = 1$ обе части уравнения (1) не имеют смысла (поясните почему).

При $x = 3$ из уравнения (1) получаем:

$$\frac{1}{3-1} + \frac{1}{3-2} = 2 - \frac{1}{9-9+2},$$

т. е. $\frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{1}{2}$ — верное числовое равенство.

Ответ: 3.

! Заметим, что проверка найденных значений переменной при таком способе решения уравнения (использование умножения обеих частей уравнения на выражение с переменной) является **обязательной частью решения**, так как получаемое в процессе решения уравнение может быть не равносильно исходному.

При проверке найденные значения переменной подставляют в исходное уравнение или в равносильное ему.

Покажем еще один способ решения рациональных уравнений, основанный на *получении условий, равносильных данному уравнению.*

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{51 - x^2}{9 - x^2} + \frac{7 + x}{x - 3} = 2 + \frac{4 - x}{x + 3}. \qquad (2)$$

Решение. Перенеся все члены уравнения в левую часть и выполнив действия с дробями, получим уравнение, равносильное уравнению (2):

$$\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9} = 0.$$

Естественной областью определения дроби $\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$ являются значения переменной, которые не обращают знаменатель в нуль. Таким образом, значение этой дроби равно нулю тогда и только тогда, когда $x^2 + 3x = 0$ и $x^2 - 9 \neq 0$.

Корни уравнения — числа –3 и 0.

При $x = -3$ условие $x^2 - 9 \neq 0$ не выполняется, а при $x = 0$ выполняется (поясните почему); значит, корнем уравнения (2) является только число 0.

Ответ: 0.

Пример 3. Решить уравнение $\dfrac{(x^2 + 3x)(x + 3)}{x^2 - 9} = 0.$

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x^2 + 3x)(x + 3) = 0, \\ x^2 - 9 \neq 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем:

$$\begin{cases} x(x + 3)^2 = 0, \\ (x - 3)(x + 3) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x = 0 \text{ или } x = -3), \\ (x \neq 3 \text{ и } x \neq -3); \end{cases} \quad x = 0.$$

Ответ: 0.

Обратите внимание: при решении примера 3 мы не сокращали дробь, а сразу переходили к системе, равносильной исходному уравнению (используя условие равенства дроби нулю). А что будет, если дробь сократить? В этом случае получится уравнение $\dfrac{x^2 + 3x}{x - 3} = 0$, корнями которого являются $x_1 = 0$, $x_2 = -3$. Но проверка показывает, что число -3 не удовлетворяет исходному уравнению (поясните почему). Значит, корень данного уравнения — только число 0.

Таким образом, при сокращении дробей может получиться уравнение, которое, кроме корней данного уравнения, имеет еще какие-то корни. Следовательно, проверка найденных значений переменной по исходному уравнению необходима.

Пример 4. Решить уравнение

$$1 + \frac{1}{1 - x} = \frac{3}{x + 3}. \tag{3}$$

Решение. *Способ 1 (с сохранением равносильности исходному уравнению).*

$$1 + \frac{1}{1 - x} - \frac{3}{x + 3} = 0;$$

$$\frac{(1 - x)(x + 3) + x + 3 - 3(1 - x)}{(1 - x)(x + 3)} = 0;$$

$$\frac{-x^2+2x+3}{(1-x)(x+3)}=0.$$

Значение дроби $\frac{-x^2+2x+3}{(1-x)(x+3)}$ равно нулю тогда и только тогда, когда

$$-x^2+2x+3=0 \qquad (4)$$

и

$$(1-x)(x+3)\neq 0. \qquad (5)$$

Решив уравнение (4), получим $x_1=-1$, $x_2=3$.

Значения -1 и 3 удовлетворяют условию (5).

Ответ: -1; 3.

Способ 2 (без сохранения равносильности исходному уравнению). Умножив обе части уравнения (3) на общий знаменатель входящих в него дробей, т. е. на выражение $(1-x)(x+3)$, получим уравнение-следствие:

$$(1-x)(x+3)+x+3=3(1-x);$$
$$x-x^2+3-3x+x+3=3-3x;$$
$$x^2-2x-3=0;$$
$$x_1=3,\ x_2=-1.$$

Так как при решении обе части уравнения умножали на выражение, содержащее переменную, то необходима проверка полученных значений переменной x по условию (3).

Проверка. При $x=3$ из уравнения (3) получаем:

$$1+\frac{1}{1-3}=\frac{3}{3+3},$$

т. е. $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ — верное числовое равенство, значит, 3 — корень уравнения.

При $x=-1$ из уравнения (3) получаем:

$$1+\frac{1}{1-(-1)}=\frac{3}{-1+3},$$

т. е. $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ — верное числовое равенство, значит, -1 — корень уравнения.

Пример 5. Алесь сначала проплыл на лодке 15 км по Солигорскому водохранилищу, а затем 8 км по впадающей в него реке Случь, затратив на весь путь 4,5 ч. Найти собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

Р е ш е н и е. Пусть x $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ — собственная скорость лодки, тогда по реке она плыла со скоростью $(x-2)$ $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ (поясните почему). Поскольку по реке Алесь плыл $\frac{8}{x-2}$ ч, по водохранилищу $\frac{15}{x}$ ч, а на весь путь он затратил 4,5 ч, то получим уравнение

$$\frac{8}{x-2}+\frac{15}{x}=\frac{9}{2}. \qquad (6)$$

Решим это уравнение. Умножив обе части уравнения (6) на выражение $2(x-2)x$, получим уравнение-следствие:

$$8\cdot 2x+15\cdot 2(x-2)=9(x-2)x.$$

Откуда имеем квадратное уравнение $9x^2-64x+60=0$, его корни: $x_1=1\frac{1}{9}$, $x_2=6$.

Значение $1\frac{1}{9}$ не может быть решением задачи, так как собственная скорость лодки не может быть меньше скорости течения реки (поясните почему).

Значение $x=6$ проверяем подстановкой в уравнение (6) (поясните, почему необходима такая проверка) и получаем верное числовое равенство $2+2{,}5=4{,}5$, значит, 6 — корень уравнения (6).

О т в е т: 6 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

?

1. Какие уравнения называются рациональными?
2. Сформулируйте условие равенства рациональной дроби нулю.
3. Опишите способы решения рациональных уравнений.
4. В каких случаях при решении рациональных уравнений проверка найденных значений переменной по условию является обязательной частью решения?

Упражнения

Решите уравнение **(2.108—2.115)**.

2.108°. 1) $\frac{2m^2}{m-6}=\frac{8m}{m-6}$; 2) $\frac{m^2}{5-m}=\frac{4}{5-m}$;

3) $\frac{p^2}{p^2-9}=\frac{6-5p}{9-p^2}$; 4) $\frac{5}{16-t^2}=\frac{t^2-6t}{t^2-16}$;

5) $\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2x}{x-1}$; 6) $\frac{x^2+4}{x-2}=\frac{4x}{x-2}$.

2.109. 1) $\frac{2x^2-5x+3}{10x-3}=0;$ 2) $\frac{5x^2-9x-2}{8x-3}=0;$

3) $\frac{x^2-9}{(x+1)^2-25}=0;$ 4) $\frac{(x+2)^2-49}{x^2-16}=0;$

5) $\frac{x^2-5x}{(2x+1)^2-(x-2)^2}=0;$ 6) $\frac{(1-3x)^2-(1+x)^2}{7x-x^2}=0;$

7) $\frac{(1+2x)^2-(4x-11)^2}{6x-x^2}=0;$ 8) $\frac{x^2-4x}{(3x-1)^2-(4x-5)^2}=0.$

2.110. 1) $\frac{3x}{4}+\frac{3}{x-4}=0;$ 2) $\frac{x^2+4x}{x+2}-\frac{2x}{3}=0;$

3) $\frac{3x-1}{3x+1}-\frac{2(x+3)}{x+12}=0;$ 4) $\frac{x-6}{3x-10}-\frac{x-1}{2x-11}=0;$

5) $\frac{7}{2x+9}=5x+6;$ 6) $\frac{10}{2x-3}=x-1;$

7) $\frac{2x-1}{x+6}+3=0;$ 8) $\frac{2x-5}{x+5}-4=0.$

2.111. 1) $\frac{2}{x-5}=3-\frac{14}{x};$ 2) $\frac{10}{x-3}=1+\frac{8}{x};$

3) $\frac{120}{x}-1=\frac{120}{x+4};$ 4) $\frac{180}{x}=\frac{180}{x+6}+1;$

5) $\frac{5}{8}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x-3};$ 6) $\frac{4}{x+2}=1{,}5-\frac{4}{x-2}.$

2.112. 1) $\frac{x^2}{x-2}-\frac{x+2}{x-2}=4;$ 2) $\frac{x-4}{x-5}+\frac{x-6}{x+5}=2;$

3) $\frac{x}{x^2-16}+\frac{x-1}{x+4}=1;$ 4) $\frac{2x}{x-3}-\frac{6{,}4x}{x+3}=\frac{0{,}8x-20}{9-x^2};$

5) $\frac{12}{(x+6)^2}+\frac{x}{x+6}=1;$

6) $\frac{1}{x^2-16}+\frac{12}{(x+4)^2}-\frac{1}{(x-4)^2}=0.$

2.113. 1) $\frac{x-4}{x+4}+\frac{x+4}{x-4}=\frac{10x+24}{x^2-16};$

2) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{7}{2x-x^2}=\frac{2}{x^2+2x};$

3)* $\frac{7}{2x+5}-\frac{2}{x+3}=\frac{3x+11}{45};$

4)* $\frac{8}{x-4}-\frac{5}{x-3}=\frac{3x-4}{7x-33};$

5)* $\dfrac{2x+1}{x^2+3x-10}+\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}=\dfrac{8}{x^2+2x-15}$;

6)* $\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}-\dfrac{x-2}{x^2-2x-8}=\dfrac{3x+13}{x^2-3x-4}$.

2.114. 1) $\dfrac{5}{x-4}-\dfrac{3}{2x+2}=\dfrac{x-2}{2(x+1)}$;

2) $\dfrac{9}{2(x+4)}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x+1}{2(x-1)}$;

3) $\dfrac{2}{x^2-4}=\dfrac{1}{x(x-2)}+\dfrac{x-4}{x(x+2)}$;

4) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{3x-2}{x(x^2-1)}$;

5) $\dfrac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$;

6) $\dfrac{2}{(x-1)(x+3)}+\dfrac{3}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{5}{(x-1)(x-2)}$.

2.115*. 1) $\dfrac{1-\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{x}{x+2}+1}=2$; 2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x-2}}+x-2=0$;

3) $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x}{1-x}-1}=\dfrac{3}{14-x}$; 4) $x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x+\dfrac{1}{x}}=0$.

2.116. 1)° Расстояние в 32 км один лыжник прошел на 32 мин быстрее другого. Какова скорость каждого лыжника, если скорость одного из них на 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше скорости другого?

2)° Расстояние в 360 км скорый поезд прошел на 1,5 ч быстрее товарного. Какова скорость каждого поезда, если скорость движения товарного поезда на 20 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ меньше скорости скорого?

3) Моторная лодка прошла по реке Сервечь до ее впадения в Вилейское водохранилище 33 км, а затем шла по водохранилищу еще 16 км, затратив на весь путь 5 ч. Скорость течения реки 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите собственную скорость лодки.

4) Катер прошел 27 км по Чигиринскому водохранилищу, а затем 45 км по реке Друть, впадающей в водохранилище, затратив на весь путь 4 ч 30 мин. Скорость течения реки 3 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Найдите собственную скорость катера.

2.117. 1) Братья Денис и Максим могут собрать из деталей конструктора модель автомобиля за 6 мин. Один Денис мог бы собрать модель на 5 мин быстрее, чем Максим. За какое время каждый из братьев мог бы в одиночку собрать модель автомобиля?

2) Сестры Оля и Варя пропололи грядки за 3 ч 36 мин. Одна Оля могла бы выполнить эту работу на 3 ч быстрее, чем одна Варя. За какое время каждая из сестер могла бы в одиночку прополоть грядки?

3) Несколько детей разделили поровну между собой 28 конфет. Если бы детей было на 3 меньше, то каждый получил бы дополнительно еще 3 конфеты. Сколько было детей?

4) Работница укладывает 588 фломастеров поровну в упаковки. Если в каждую упаковку класть на 7 фломастеров больше, чем запланировано, то упаковок станет на 7 меньше. Сколько фломастеров должно быть в одной упаковке?

2.8. Рациональные неравенства

Пусть A и B — многочлены от одной и той же переменной. Неравенства вида

$$\frac{A}{B} > 0 \quad \left(\frac{A}{B} \geqslant 0, \quad \frac{A}{B} < 0, \quad \frac{A}{B} \leqslant 0\right)$$

называются ***рациональными***.

Например, неравенства

$$\frac{2x^2 + 3x}{x^2 - 1} \leqslant 0; \qquad \frac{2x^2 + 3}{5x - 1} > 0; \qquad \frac{3x^2 - 4x + 1}{4x^3 + 3x - 7} \geqslant 0$$

рациональные.

Теорема. Пусть A и B — многочлены от одной и той же переменной x. Тогда неравенства

$$\frac{A}{B} > 0 \text{ и } A \cdot B > 0 \quad \left(\frac{A}{B} < 0 \text{ и } A \cdot B < 0\right)$$

равносильны.

Доказательство. Каждое из числовых неравенств $\frac{a}{b} > 0$ и $ab > 0$ означает, что a и b — числа одного знака. Поэтому если $\frac{a}{b} > 0$, то $ab > 0$, и наоборот, если $ab > 0$, то $\frac{a}{b} > 0$.

Из этого простого факта следует, что если при некотором значении переменной x значение дроби $\frac{A}{B} > 0$, то и значение произведения $A \cdot B > 0$. И наоборот, если значение произведения $A \cdot B > 0$, то и значение дроби $\frac{A}{B} > 0$.

Значит, неравенства $\frac{A}{B} > 0$ и $A \cdot B > 0$ равносильны. ☒

Строгие неравенства $\frac{A}{B} < 0$ и $A \cdot B < 0$ также равносильны.

> Нестрогие неравенства $\frac{A}{B} \geqslant 0$ и $A \cdot B \geqslant 0$ $\left(\frac{A}{B} \leqslant 0 \text{ и } A \cdot B \leqslant 0\right)$ могут быть и неравносильными.
>
> Если при некотором значении переменной x значение дроби $\frac{A}{B} \geqslant 0$, то и значение произведения $A \cdot B \geqslant 0$.
>
> Действительно, если $\frac{A}{B} > 0$, то $A \cdot B > 0$, и если $\frac{A}{B} = 0$, то $A \cdot B = 0$.
>
> Но обратное утверждение неверно, т. е. *из того, что* $A \cdot B \geqslant 0$, *не следует, что* $\frac{A}{B} \geqslant 0$.
>
> Действительно, может случиться, что при некотором значении переменной x значение $B = 0$. Тогда $A \cdot B = 0$, а выражение $\frac{A}{B}$ не имеет смысла.

Рассмотрим несколько примеров решения рациональных неравенств.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{(x-1)(x+3)}{2x-5} > 0. \qquad (1)$$

Решение. Решим его методом интервалов.

Способ 1. Согласно теореме неравенство (1) равносильно неравенству $(x-1)(x+3)(2x-5) > 0$.

Рассмотрим функцию $y = (x-1)(x+3)(2x-5)$ (ее область определения — множество $\boldsymbol{R}$).

Нули функции $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2{,}5$ отметим на координатной прямой светлыми кружками, поскольку они не могут быть решениями строгого неравенства (1) (рис. 118).

Знаками «+» и «–» отметим промежутки знакопостоянства функции (поясните, почему эти знаки чередуются).

Ответ: $(-3; 1) \cup (2{,}5; +\infty)$.

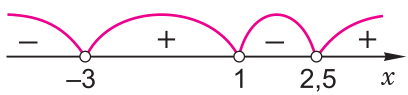


Рис. 118

Способ 2. Рассмотрим функцию $y = \dfrac{(x-1)(x+3)}{2x-5}$; ее область определения — значения $x \neq 2{,}5$ (точку $x = 2{,}5$ (см. рис. 118) отметим на координатной прямой светлым кружком, потому что она не входит в область определения функции). Из уравнения $y = 0$ найдем нули функции: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ (их также отметим светлыми кружками; поясните почему).

Определим промежутки знакопостоянства этой функции (см. рис. 118).

Заметим, что, используя рисунок 118, можно указать ответ и к неравенству $\dfrac{(x-1)(x+3)}{2x-5} < 0$ (сделайте это самостоятельно).

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{(x-1)(x+3)}{2x-5} \geqslant 0. \qquad (2)$$

Решение. По определению нестрогого неравенства неравенство (2) равносильно утверждению:

$$\frac{(x-1)(x+3)}{2x-5} > 0 \text{ или } \frac{(x-1)(x+3)}{2x-5} = 0.$$

Решив строгое неравенство методом интервалов, получим, что ему удовлетворяют все значения $x \in (-3;\ 1) \cup (2{,}5;\ +\infty)$.

Корни уравнения: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

Объединив решения строгого неравенства и уравнения, получим решение неравенства (2).

Ответ: $[-3;\ 1] \cup (2{,}5;\ +\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} \geqslant 0. \qquad (3)$$

Решение. Рассмотрим функцию $y = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$; ее область определения — все значения x, при которых $x^2 - 7x + 10 \neq 0$, т. е. $x \neq 2$ и $x \neq 5$ (точки 2 и 5 отметим на рисунке 119 светлыми кружками, так как они не входят в область определения функции).

Нули этой функции — те значения x из ее области определения, при которых $y = 0$, т. е. $x^2 - 5x + 6 = 0$.

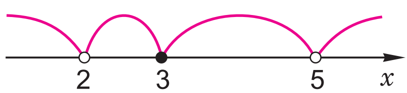


Рис. 119

Решив это уравнение, имеем $x = 2$ или $x = 3$. Но поскольку число 2 не входит в область определения функции, то $x = 3$ — единственный нуль данной функции (на рисунке 119 точку 3 отмечаем черным кружком).

В каждом из образовавшихся четырех интервалов определим знаки значений функции и отметим знаками «+» и «–» ее промежутки знакопостоянства.

Так, при $x = 1$ получаем $y = \frac{1 - 5 + 6}{1 - 7 + 10} > 0$, поэтому над первым интервалом $(-\infty; 2)$ ставим знак «+». При $x = 2{,}5$ получаем $y = \frac{6{,}25 - 12{,}5 + 6}{6{,}25 - 17{,}5 + 10} > 0$, поэтому и над вторым интервалом $(2; 3)$ ставим знак «+».

Аналогично при $x = 4$ получаем $y < 0$, а при $x = 6$ имеем $y > 0$ (убедитесь в этом), поэтому над третьим интервалом $(3; 5)$ ставим знак «–», а над четвертым $(5; +\infty)$ — знак «+» (рис. 120).

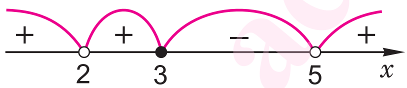


Рис. 120

Используя этот рисунок, записываем ответ к неравенству (3), т. е. те значения x, при которых $y \geqslant 0$.

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (2; 3] \cup (5; +\infty)$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{(x + 3)^6 (7 - 2x)^7}{x(2 - x)} \geqslant 0. \qquad (4)$$

Решение. *Способ 1.* Рассмотрим функцию $y = \frac{(x + 3)^6 (7 - 2x)^7}{x(2 - x)}$; ее область определения $x \neq 0$ и $x \neq 2$, а ее нули $x_1 = -3$, $x_2 = 3{,}5$.

На рисунке 121 отметим промежутки знакопостоянства функции y и укажем те значения x, при которых $y \geqslant 0$, т. е. решения неравенства (4).

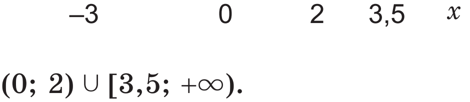


Рис. 121

Ответ: $\{-3\} \cup (0; 2) \cup [3{,}5; +\infty)$.

Объясните, почему в соседних интервалах $(-\infty; -3)$ и $(-3; 0)$ функция y имеет значения одинаковых знаков и почему число -3 включено в ответ к неравенству (4).

Способ 2. Неравенство (4) равносильно системе

$$\begin{cases}(x+3)^6(7-2x)^7x(2-x)\geqslant 0,\\ x(2-x)\neq 0.\end{cases}$$

Рассмотрим функцию $y=(x+3)^6(7-2x)^7x(2-x)$ при $x\neq 0$ и $x\neq 2$.

Ее нули $x_1=-3$, $x_2=3{,}5$ отметим на координатной прямой черными кружками, а точки $x_3=0$ и $x_4=2$ — светлыми (поясните почему). Укажем на рисунке 121 промежутки знакопостоянства рассматриваемой функции и выпишем те значения x, при которых $y\geqslant 0$, т. е. решения неравенства (4).

Заметим, что, используя рисунок 121, можно записать и ответ к неравенству

$$\frac{(x+3)^6(7-2x)^7}{x(2-x)}\leqslant 0 \qquad (5)$$

(сделайте это). Поясните, почему ответ к неравенству (5) можно записать так:

$$(-\infty;\,0)\cup(2;\,3{,}5].$$

Итак, решение неравенства методом интервалов сводится к нахождению промежутков знакопостоянства некоторой функции. Нули этой функции включаются в решения неравенства, если оно нестрогое.

Пример 5. Решить неравенство

$$\frac{1}{x}\leqslant\frac{x}{x+6}. \qquad (6)$$

Решение. Неравенство (6) равносильно неравенству

$$\frac{x^2-x-6}{x(x+6)}\geqslant 0. \qquad (7)$$

Решим неравенство (7) методом интервалов.

Рассмотрим функцию $y=\dfrac{x^2-x-6}{x(x+6)}$; ее область определения $x\neq 0$ и $x\neq -6$, а ее нули — числа -2 и 3. Отметим на координатной прямой промежутки знакопостоянства этой функции и укажем те значения x, при которых $y\geqslant 0$ (рис. 122), т. е. решения неравенства (7).

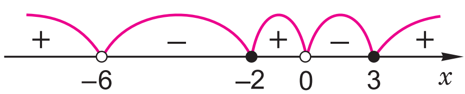


Рис. 122

Ответ: $(-\infty;\,-6)\cup[-2;\,0)\cup[3;\,+\infty)$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\frac{9}{4+|2+x|} \geqslant |2+x|-4.$$

Решение. При всех значениях x знаменатель $4+|2+x|>0$. Умножив обе части данного неравенства на $4+|2+x|$, получим и решим равносильное ему неравенство:

$$9 \geqslant (|2+x|-4)(4+|2+x|);$$

$$(|2+x|)^2-16 \leqslant 9;$$

$$(|2+x|)^2 \leqslant 25;$$

$$|2+x| \leqslant 5;$$

$$-5 \leqslant 2+x \leqslant 5;$$

$$-7 \leqslant x \leqslant 3.$$

Ответ: $[-7; 3]$.

?

1. Какие неравенства называются рациональными?

2. Какое неравенство равносильно неравенству $\frac{A}{B}>0$?

3. Верно ли, что равносильны утверждения:

а) $\frac{A}{B} \geqslant 0$ и $A \cdot B \geqslant 0$;

б) $\frac{A}{B} \leqslant 0$ и ($A \cdot B < 0$ или $A \cdot B = 0$);

в) $\frac{A}{B} \geqslant 0$ и $\left(\frac{A}{B} > 0 \text{ или } \frac{A}{B} = 0\right)$;

г) $\frac{A}{B} \leqslant 0$ и $\left(A \cdot B < 0 \text{ или } \begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0 \end{cases}\right)$;

д) $\frac{A}{B} \geqslant 0$ и $\begin{cases} A \cdot B \geqslant 0, \\ B \neq 0? \end{cases}$

4. Как решать методом интервалов:

а) строгое рациональное неравенство;

б) нестрогое рациональное неравенство?

Упражнения

2.118°. Решите неравенство:

1) $\frac{x-7}{x+3} < 0$;

2) $\frac{x+4}{x-1} > 0$;

3) $\frac{2x}{x-2,4} \leqslant 0$;

4) $\frac{5x}{x+8,6} \geqslant 0$;

5) $\frac{5,3-x}{x+2,7} < 0$;

6) $\frac{4,9-x}{x-3,6} > 0$;

7) $\dfrac{5x-4,5}{3-1,2x} \leqslant 0$; 8) $\dfrac{10-2,5x}{9x-8,1} \geqslant 0$;

9) $\dfrac{6x-2}{3,8-1,9x} < 0$; 10) $\dfrac{13x+26}{15-3x} > 0$.

2.119°. При каких значениях x значения дроби будут положительными:

1) $\dfrac{x-2}{x+4}$; 2) $\dfrac{x+8}{x-7}$; 3) $\dfrac{6-x}{x-11}$; 4) $\dfrac{5-2x}{x}$?

2.120°. При каких значениях x значения дроби будут отрицательными:

1) $\dfrac{x-12}{x+12}$; 2) $\dfrac{3x}{x-8}$;

3) $\dfrac{5x-3}{x+1}$; 4) $\dfrac{7-x}{2x+4}$?

Решите неравенство **(2.121—2.128).**

2.121°. 1) $\dfrac{(x+11)(x-12)}{(x-4)(x+8)} > 0$; 2) $\dfrac{(x-6)(x+2)}{(x+16)(x+20)} < 0$;

3) $\dfrac{(x-1)(x+5)}{(x+14)(x-7)} < 0$; 4) $\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+6)(x+9)} > 0$;

5) $\dfrac{(x+16)(x+10)}{(x+18)(x-7)} \leqslant 0$; 6) $\dfrac{(x-29)(x-20)}{(x-9)(x-26)} \geqslant 0$.

2.122°. 1) $\dfrac{(x-1,7)(x+1,5)}{(3x-1)(x+1)} \leqslant 0$; 2) $\dfrac{(x+3,2)(x-2,3)}{(4x-8)(5+x)} \geqslant 0$;

3) $\dfrac{(5x-3)(15-4x)}{(x+8)(2x-1)} \geqslant 0$; 4) $\dfrac{(2x-5)(3x+7)}{(4-x)(6x+6)} \leqslant 0$;

5) $\dfrac{(5-x)(3x-1)}{(2x+8)(7x+8)} < 0$; 6) $\dfrac{(3x+4)(14-28x)}{(9x-27)(6x-30)} > 0$.

2.123. 1) $\dfrac{x^2-7x+12}{x-1} \geqslant 0$; 2) $\dfrac{12+x-x^2}{x+5} < 0$;

3) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+8x+15} < 0$; 4) $\dfrac{x^2-12x+11}{x^2+2x-8} \geqslant 0$;

5) $\dfrac{6x^2-17x+5}{3x^2+8x-3} \geqslant 0$; 6) $\dfrac{3x^2-10x-8}{5x^2+6x+1} < 0$.

2.124. 1) $\dfrac{x^2-3x+8}{-x^2+x-1} > 0$; 2) $\dfrac{x^2-6x+10}{-x^2+10x-30} < 0$;

3) $\frac{x^2+4x+5}{-x^2-16+8x} \leqslant 0;$ 4) $\frac{2x^2-4x+13}{-4x^2-12x-9} \geqslant 0;$

5) $\frac{4x^2-9x+7}{-x^2-64+10x} \geqslant 0;$ 6) $\frac{-11+8x-2x^2}{x^2+0{,}25+x} \leqslant 0.$

2.125. 1) $\frac{x^2+6x+10}{(x^2-16)(x+7)} < 0;$ 2) $\frac{(x^2-81)(x-5)}{x^2-7x+18} > 0;$

3) $\frac{x^2+5x-14}{x^2-2x+8} \geqslant 0;$ 4) $\frac{x^2-5x+40}{x^2+x-20} \leqslant 0.$

2.126. 1) $\frac{(x-6)^2(x+1)(x-9)}{(x-7)^4(x+3)} > 0;$ 2) $\frac{(x-4)(x-8)^2}{(x+8)(x+4)(x-3)^2} < 0;$

3) $\frac{(x+1)(x-5)}{(x-7)^2(x+10)^2(x+7)} \geqslant 0;$ 4) $\frac{(x-12)^2(x+15)^2}{(x+6)(x+2)(x-2)} \leqslant 0;$

5) $\frac{(x^2+x)(x^2-x)}{5x-1} > 0;$ 6) $\frac{8-x}{(x^2-2x)(x^2+2x)} < 0;$

7) $\frac{(x^4-16)(x^2-100)}{121+x^2-22x} \leqslant 0;$ 8) $\frac{49+x^2-14x}{(x^4-81)(x^2-25)} \geqslant 0.$

2.127. 1) $\frac{1}{x} \geqslant 1;$ 2) $\frac{1}{x} \leqslant 1;$ 3) $\frac{1}{x} > -1;$

4) $\frac{1}{x} < -1;$ 5) $\frac{2}{x^2} \leqslant 1;$ 6) $\frac{4}{x^2} \geqslant 1;$

7) $\frac{3x-1}{2x+5} < 3;$ 8) $\frac{2x-1}{5+3x} > -2;$

9) $\frac{5-2x}{3x^2-2x-16} \geqslant 1;$ 10) $\frac{5-4x}{3x^2-x-4} \leqslant 4.$

2.128. 1) $\frac{x+1}{1-x} + \frac{x-1}{x} < 2;$ 2) $\frac{8-x}{x-10} - \frac{12}{(2-x)7} > 1;$

3) $\frac{2x-1}{2x+1} < \frac{2x+1}{2x-1} + \frac{8}{1-4x^2};$ 4) $\frac{12}{1-9x^2} < \frac{1-3x}{1+3x} + \frac{1+3x}{3x-1};$

5) $\frac{x^2-3}{1-x^2} + \frac{x+1}{x-1} < \frac{4}{1+x};$ 6) $\frac{x^2+17}{x^2-1} > \frac{x-2}{x+1} - \frac{5}{1-x};$

7) $\frac{3}{(2x+5)^2} + \frac{4}{(2x+1)^2} > \frac{7}{(2x+5)(2x+1)};$

8) $\frac{1}{(3-2x)^2} - \frac{3}{9-4x^2} < \frac{4}{(3+2x)^2}.$

Укажите естественную область определения выражения **(2.129—2.130).**

2.129. 1) $\frac{x^2+2x-15}{\sqrt{144-9x^2}}$; 2) $\frac{16-24x-9x^2}{\sqrt{x+2}}$;

3) $\frac{2x-3}{\sqrt{(3x-1)(6x-2)}}$; 4) $\frac{5x+10}{\sqrt{(11x+22)(8x-2)}}$;

5) $\sqrt{(3x+5)(5x^2+6x+1)}$;

6) $\sqrt{(7-x)(4x^2+19x+12)}$;

7) $\sqrt{\frac{2x^2-9x+4}{x^2-5x+4}}$; 8) $\sqrt{\frac{x^2-4x+3}{2x^2-3x-2}}$;

9) $\sqrt{\frac{\sqrt{2x^2-9x+4}}{-2x^2+3x+2}}$; 10) $\sqrt{\frac{\sqrt{8+7x-x^2}}{-2x^2+3x+9}}$.

2.130. 1) $\sqrt{x-\frac{64}{x}}$; 2) $\sqrt{\frac{x}{20}-\frac{5}{x}}$;

3) $\sqrt{\frac{5}{x}-\frac{3}{3-x}}$; 4) $\sqrt{\frac{10}{x}+\frac{12}{x-2}}$;

5) $\sqrt{\frac{3x+2}{x^2+x-2}+1}$; 6) $\sqrt{\frac{2x-7}{x^2+2x-8}-1}$.

Решите неравенство **(2.131—2.135).**

2.131. 1) $\frac{x^2-6x}{|x|+2}>0$; 2) $\frac{|x|+9}{x^2+8x}<0$;

3) $\frac{2x^2-5x-3}{|x-1|+8}\leqslant 0$; 4) $\frac{|4-x|+12}{7x-2x^2-3}\geqslant 0$.

2.132. 1) $\frac{2x^2-3x-2}{|x|-3}>0$; 2) $\frac{x^2-6x+5}{|x|-6}<0$;

3) $\frac{|x|-5}{x^2-6x-7}\leqslant 0$; 4) $\frac{x^2-2x-3}{|x|-1}\geqslant 0$;

5) $\frac{x^2-|x|-12}{x-7}<0$; 6) $\frac{x+8}{x^2-7|x|+10}>0$.

2.133. 1) $\left|\frac{x+4}{x-6}\right|\geqslant 2$; 2) $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\leqslant 3$;

3)* $\frac{|x-5|}{x+4}<1$; 4)* $\frac{x-8}{|6-x|}>1$.

2.134°. 1) $\dfrac{|x^2-4x+3|}{x^2-x+2} \leqslant 1$; 2) $\dfrac{|x^2-5x+4|}{x^2-x+1} \geqslant 1$;

3) $\dfrac{19x-2}{|x^2+5x+4|} > 2$; 4) $\dfrac{19x+53}{|x^2-4x+3|} < -1$.

2.135*. 1) $\dfrac{5}{4+|3-x|} > |3-x|$;

2) $|x-1|-1 < \dfrac{3}{|x-1|+1}$;

3) $|x+2| < \dfrac{5}{|x+2|+2} + 2$;

4) $2|2x+1| \leqslant 2 - \dfrac{2}{|2x+1|+1}$.

2.136. 1) Длина прямоугольника больше 30 см, а ширина составляет $\frac{2}{3}$ его длины. Верно ли, что площадь прямоугольника больше 600 см^2?

2) Одна сторона прямоугольника больше другой на 3 дм. Найдите длины сторон прямоугольника, если его площадь меньше 10 дм^2.

2.137. 1) Длина прямоугольника на 3 м больше его ширины. Какой должна быть длина прямоугольника, чтобы его площадь была меньше 28 м^2?

2) Число рядов в яблоневом саду на 12 меньше числа яблонь в одном ряду. Сколько может быть рядов, если в саду меньше 925 яблонь?

2.138*. 1) Из городов Сморгонь и Минск, расстояние между которыми 120 км, одновременно навстречу друг другу выехали два атомобиля. Скорость первого автомобиля на 20 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше скорости второго. Первый автомобиль сделал тридцатиминутную остановку. Какова должна быть скорость первого автомобиля, чтобы он приехал в город Минск не позже второго?

2) Мотоциклист едет с постоянной скоростью, но может как увеличить ее на 20 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, так и уменьшить на 10 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. В первом случае он преодолеет 180 км более чем на 1 ч быстрее, нежели во втором. С какой скоростью едет мотоциклист?

Глава 3
Системы уравнений с двумя переменными

3.1. Система двух линейных уравнений с двумя переменными

Определение. Равенство, содержащее две переменные, называется *уравнением с двумя переменными*.

Переменные в уравнении называются также *неизвестными*.

Приведем примеры уравнений с двумя переменными:

$$3x - y = 13; \quad (1)$$

$$3x - y^2 = 13. \quad (2)$$

Формулы, которые задают различные функции ($y = \sqrt{x}$; $y = x^3$; $y = -\frac{5}{x}$; $y = 7x - 3$ и т. д.), также являются примерами уравнений с двумя переменными.

Отметим, что уравнение с двумя переменными описывает определенную зависимость между этими переменными.

Определение. *Упорядоченная пара значений переменных*, при которых уравнение обращается в верное числовое равенство, называется *решением уравнения с двумя переменными*.

Например, упорядоченная пара (1; –10) является решением уравнения (1). (Будем также писать $x = 1$, $y = -10$.) Упорядоченная пара $\left(\frac{13}{3};\ 0\right)$ тоже является решением этого уравнения.

Упорядоченная пара $\left(5;\ \sqrt{2}\right)$ является решением уравнения (2). Упорядоченная пара $\left(7;\ -2\sqrt{2}\right)$ также является решением уравнения (2). А решением уравнения (1) эти упорядоченные пары не являются.

! Заметим, что термин «корень уравнения» применяется только к уравнениям с одной переменной (с одним неизвестным). Термин «решение уравнения» применяется к уравнениям как с одной переменной, так и с несколькими переменными.

Определение. **Два уравнения с двумя переменными называются *равносильными*, если каждое решение первого уравнения является решением второго, и наоборот — каждое решение второго уравнения является решением первого, т. е. если они имеют одни и те же решения.**

Равносильными считаются и уравнения, которые не имеют решений.

Например, уравнения

$$3x - y = 13 \text{ и } y = 3x - 13$$

равносильны (они имеют одни и те же решения), а уравнения (1) и (2) не являются равносильными.

Уравнения

$$x^2 + y^2 = -1 \text{ и } x^2 + 3y^2 = -1$$

тоже равносильны (они не имеют решений).

! При решении уравнений с двумя переменными используются те же свойства, что и при решении уравнений с одной переменной.

1. Если к обеим частям уравнения прибавить или из обеих частей уравнения вычесть одно и то же число, то получится уравнение, равносильное данному.

2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится уравнение, равносильное данному.

Из первого свойства следует:

если в уравнении слагаемое из одной части перенести в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

Пример 1. Решить уравнение с двумя переменными:

а) $2x^2 + y^2 = 0$;

б) $4(x - 8)^4 + (5 + y)^2 = 0$;

в) $x^6 + 7y^2 = -5$.

Решение. а) Поскольку при любых значениях переменной x имеем $2x^2 \geqslant 0$ и при любых значениях переменной y имеем $y^2 \geqslant 0$, то уравнение $2x^2 + y^2 = 0$ обращается в верное числовое равенство только тогда, когда $x = 0$ и $y = 0$.

б) Равенство $4(x - 8)^4 + (5 + y)^2 = 0$ обращается в верное числовое равенство только при $x - 8 = 0$ и $5 + y = 0$.

Откуда имеем $x = 8$ и $y = -5$.

в) Поскольку выражение $x^6 + 7y^2$ (левая часть данного уравнения) принимает неотрицательные значения при любых значениях переменных x и y, то принять значение -5 оно не может.

Ответ: а) (0; 0); б) (8; –5); в) нет решений.

Пример 2. Решить уравнение с двумя переменными:

а) $2x + y = 3$; б) $3x - 2y = 6$.

Решение. а) Левая часть данного равенства может принимать значение 3 в бесконечном количестве случаев, например, когда $x = 1$ и $y = 1$, или $x = 0$ и $y = 3$, или $x = 3$ и $y = -3$ и т. д.

Пусть t — некоторое действительное число ($t \in \boldsymbol{R}$). Подставив вместо переменной x в данное уравнение число t, получим уравнение с одной переменной (с одним неизвестным) y:

$$2t + y = 3.$$

Откуда найдем $y = 3 - 2t$.

Говорим, что мы *выразили y через t из уравнения* $2t + y = 3$.

Решением уравнения $2x + y = 3$ будут все упорядоченные числовые пары вида $(t;\ 3 - 2t)$.

б) *Способ 1.* Пусть $t \in \boldsymbol{R}$. Подставив в уравнение $3x - 2y = 6$ вместо x число t, получим уравнение $3t - 2y = 6$, откуда выразим y через t: $y = \frac{3t - 6}{2}$.

Ответ: а) $(t;\ 3 - 2t)$, где $t \in \boldsymbol{R}$; б) $\left(t;\ \frac{3t - 6}{2}\right)$, где $t \in \boldsymbol{R}$.

Способ 2. Пусть $t \in \boldsymbol{R}$. Подставив в уравнение $3x - 2y = 6$ вместо y число t, получим уравнение $3x - 2t = 6$, откуда $x = \frac{6 + 2t}{3}$.

Ответ: $\left(\frac{6 + 2t}{3};\ t\right)$, где $t \in \boldsymbol{R}$.

Определение. ***Линейным уравнением с двумя переменными*** **называется уравнение вида**

$$\boldsymbol{ax + by = c,} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — числа, $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — переменные.

Если хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю, то уравнение (3) называется ***уравнением первой степени***.

Примерами линейных уравнений с двумя переменными являются уравнения из примера 2. Они же служат примерами уравнений первой степени.

Обратите внимание на два примера линейных уравнений с двумя переменными, которые не являются уравнениями первой степени:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0, \qquad (4)$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 7. \qquad (5)$$

Уравнение (4) имеет бесконечно много решений, а уравнение (5) не имеет решений.

Очень часто зависимость между двумя переменными описывается при помощи нескольких уравнений. В таких случаях говорят о ***системе уравнений с двумя переменными***.

Напомним, что обычно уравнения системы записывают в столбик одно под другим и объединяют фигурной скобкой.

Примеры систем уравнений с двумя переменными x и y:

а) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - 3y = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 2x + y = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 2x + y = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - 2y = 3, \\ x^2 - xy = 4. \end{cases}$

Определение. Упорядоченная пара значений переменных, которые одновременно обращают каждое уравнение системы в верное числовое равенство, называется *решением системы*.

Например, пара чисел (–1; –3), т. е. $x = -1$, $y = -3$, является решением системы г) (убедитесь в этом), но не является решением ни одной из систем а)—в).

Определение. *Решить систему уравнений* — это значит найти все ее решения или доказать, что их нет.

В этой главе мы будем в основном решать системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Их записывают в общем виде так:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \qquad (6)$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — числа.

Примерами систем линейных уравнений с двумя переменными (неизвестными) x и y являются системы а)—в), а система г) к ним не относится (поясните почему).

Определение. **Две системы уравнений называются *равносильными*, если каждое решение первой системы является решением второй, и наоборот — каждое решение второй системы является решением первой, т. е. если они имеют одни и те же решения.**

Равносильными считаются и системы, которые не имеют решений.

Теорема. Если одно из уравнений системы заменить равносильным ему, то полученная система будет равносильна исходной.

Примем эту теорему без доказательства. Отметим, что она вместе со свойствами 1 и 2 даст нам возможность решать системы уравнений.

Система — слово греческого происхождения и в переводе означает «составленное из частей», «соединение».

Пример 3. Равносильны ли системы уравнений:

а) $\begin{cases} 4x - 6y = 10, \\ 3x + 7y = 13 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 3x + 7y = 13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 3x + 7y = 13 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ y = \dfrac{13 - 3x}{7}? \end{cases}$

Решение. а) Уравнение $4x - 6y = 10$ получено из уравнения $2x - 3y = 5$ умножением его обеих частей на число 2, значит, по свойству 2 эти уравнения равносильны. Вторые уравнения обеих систем одинаковы. Таким образом, по теореме предложенные системы равносильны.

б) Уравнение $y = \dfrac{13 - 3x}{7}$ получилось из уравнения $3x + 7y = 13$ в результате таких действий: сначала из левой части в правую перенесли слагаемое $3x$, изменив знак на противоположный, а потом разделили обе части на число 7. На основании следствия из свойства 1 и свойства 2 получили равносильное исходному уравнение. Первые уравнения обеих систем одинаковы. Следовательно, по теореме данные системы равносильны.

Пример 4. Обосновать, что системы

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ x^2 - y^2 = 4(x + y) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = 3 - 2x, \\ x - y = 4 \end{cases}$$

не являются равносильными.

Решение. Пара чисел (3; –3), т. е. $x = 3$, $y = -3$, является решением первой системы, но не является решением второй системы, значит, эти системы не равносильны.

?

1. Сформулируйте определение уравнения с двумя переменными.
2. Что описывает уравнение с двумя переменными или система уравнений с двумя переменными?
3. Как записывают систему двух линейных уравнений с двумя переменными?
4. Что называется решением системы уравнений с двумя переменными?
5. Что значит решить уравнение (систему уравнений) с двумя переменными?
6. Какие два уравнения (две системы уравнений) с двумя переменными называются равносильными?
7. Назовите преобразования уравнений (систем уравнений), которые позволяют из данного уравнения (системы) получить равносильное ему уравнение (систему).
8. Могут ли равносильные уравнения (системы уравнений) с двумя переменными не иметь решений?

Упражнения

3.1°. Верно ли, что упорядоченная пара:

1) (1; 3) — решение уравнения $x + 2y = 7$;
2) (3; –1) — решение уравнения $3x - y = 10$;
3) (0; 15) — решение уравнения $7x + y = 15$;
4) (5; 3) — решение уравнения $3x - 5y = 0$;
5) (0; 0) — решение уравнения $5x + 8y = 0$;
6) $\left(4; -\frac{1}{7}\right)$ — решение уравнения $5y - 7x = 21$?

3.2°. Является ли решением уравнения $4x + 3y = 14$ пара чисел:

1) $x = 2,\ y = 3$;
2) $x = 5,\ y = 0$;
3) $x = 5,\ y = -2$;
4) $x = 2{,}5,\ y = 1\frac{1}{2}$;
5) $x = t,\ y = \frac{14 - 4t}{3}$;
6) $x = x_0,\ y = 14 - 4x_0$?

3.3°. Укажите по три упорядоченные пары $(x; y)$, являющиеся решениями уравнения:

1) $x - y = 0$;
2) $x + y = 1$;
3) $2x - 7y = 3$;
4) $5x - 3y = 4$;
5) $0 \cdot x + 3y = 6$;
6) $4x + 0 \cdot y = 0$;
7) $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$;
8) $\frac{y}{2} - \frac{x}{2} = 1$;
9) $\frac{y}{5} + \frac{x}{5} = 1$;
10) $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = -1$.

3.4. Равносильны ли уравнения:

1) $2x + 3y = 7$ и $y = \frac{1}{3}(7 - 2x)$;

2) $3x + 2y = 9$ и $y = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}x$;

3) $5x - 8y = 6$ и $y = \frac{1}{8}(5x - 6)$;

4) $7x - 5y = 12$ и $y = \frac{1}{5}(7x - 12)$;

5) $7x - 4y = 3$ и $x = \frac{3 + 4y}{7}$;

6) $5x + 3y = 6$ и $x = \frac{6 - 3y}{5}$;

7) $x^2 + y^2 + 25 = 0$ и $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{16} = 0$;

8) $|x + y| + |x - y| = -10$ и $\sqrt{(2x + y)^2} + 36 = 0$?

3.5°. Выразите y через x из уравнения:

1) $2x + 6y = 25$;
2) $7x - 14y = 10$;
3) $6x + 11y = -48$;
4) $-5x - 14y = 8$;
5) $8x + 7y = 3$;
6) $9x + 5y = 2$;
7) $9x - 6y = 17$;
8) $12x - 9y = 8$;
9) $10x + 13y = 16$;
10) $8x + 9y = 15$.

3.6. Запишите в общем виде решения уравнений из упражнения **3.5**. Укажите решения этих уравнений при:

а) $x = 2$; б) $x = -5$; в) $x = t$.

3.7. Решите уравнение:

1) $(2x - 7)^2 + (3y + 2)^2 = 0$;
2) $(4x + 5)^2 + (y - 6)^2 = 0$;
3) $|8x + 16| + |y + 4| = 0$;
4) $|3x - 9| + |5y - 15| = 0$;
5) $\sqrt{x + 5} + |y - 1| = 0$;

6) $\sqrt{x-2}+|y+5|=0$;

7) $x^2+y^2+10=2x+6y$;

8) $x^2+y^2+34=10x-6y$;

9) $\sqrt{2x-7}+(y+4)^2=-5$;

10) $|29x+47|+(5y-29)^2=-1$.

3.8. Является ли упорядоченная пара чисел (1; 0) решением уравнения:

1) $|x-1|+2|y|=-1$; 2) $\left|\frac{x-1}{x}\right|+\left|\frac{1}{1+y}\right|=1$;

3) $x^2+y^2-1=0$; 4) $xy+x=3$?

3.9°. Верно ли, что упорядоченная пара чисел (x_0, y_0) является решением системы:

1) $\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x+y=4, \end{cases}$ если $x_0=1,\ y_0=2$;

2) $\begin{cases} 3x-y=6, \\ 4x+2y=7, \end{cases}$ если $x_0=-1,\ y_0=4$;

3) $\begin{cases} x+y=12, \\ x-y=2, \end{cases}$ если $x_0=11,\ y_0=1$;

4) $\begin{cases} 2y-3x=1, \\ 3x+5y=34, \end{cases}$ если $x_0=5,\ y_0=8$;

5) $\begin{cases} 7x-3y=4, \\ 2x+y=-2, \end{cases}$ если $x_0=3,\ y_0=-2$;

6) $\begin{cases} 6x-5y=3, \\ x+2y=8, \end{cases}$ если $x_0=2,\ y_0=3$?

3.10°. Укажите какие-либо два решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=3, \\ 2x+2y=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2y=1, \\ 3x-6y=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=y, \\ y=x^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y=-2x, \\ y=x^2. \end{cases}$

3.11°. Дана система уравнений:

1) $\begin{cases} x=3+2y, \\ 8y-4x=-12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=3+2y, \\ 2y-4x=5. \end{cases}$

Верно ли, что ее решением является упорядоченная пара чисел:

а) $(1; -1)$; б) $(-2; -2{,}5)$; в) $(5; 1)$;
г) $(1; 5)$; д) $(-1; -2)$; е) $(1; -3)$?

3.12. Обоснуйте (устно), что система уравнений $\begin{cases} 4x - y = 5, \\ 3x + 8y = 11 \end{cases}$ равносильна каждой из следующих систем уравнений:

1) $\begin{cases} 4x = 5 + y, \\ 3x = 11 - 8y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \frac{5 + y}{4}, \\ 6x + 16y = 22; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = 4x - 5, \\ 8y = 11 - 3x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 12x - 3y = 15, \\ y = \frac{11 - 3x}{8}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 12x - 3y = 15, \\ -12x - 32y = -44; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 32x - 8y = 40, \\ 3x + 8y = 11. \end{cases}$

3.13. Равносильны ли системы уравнений:

1) $\begin{cases} x + 5y = 7, \\ x - 3y = -1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 7 - 5y, \\ x - 3y = -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + 2y = 10, \\ 5x + 3y = 12 \end{cases}$ и $\begin{cases} 9x + 6y = 30, \\ 10x + 6y = 24; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3(x - 1) = 4y + 1, \\ 5(y - 1) = x + 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x - 4y - 4 = 0, \\ x = 5y - 6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x + 2y = 10, \\ 5x + 3y = 12 \end{cases}$ и $\begin{cases} y = \frac{10 - 3x}{2}, \\ 5x + 3y = 12; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{7y - x}{3} = -2, \\ \frac{x + 14y}{2} = 4{,}5 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 3y + 6, \\ x = 9 - 14y; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{3} = 8, \\ \frac{x + y}{3} + \frac{x - y}{4} = 11 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + 5y = 48, \\ 7x + y = 11? \end{cases}$

3.14. Найдите значения m и n, если известно, что решением системы $\begin{cases} x - 2y = m, \\ 2x - y = n \end{cases}$ являются:

1) $x = 4,\ y = -1;$ 2) $x = -3,\ y = 1;$
3) $x = 0,\ y = 3;$ 4) $x = -2,\ y = -4;$
5) $x = 9,\ y = 0;$ 6) $x = 8,\ y = -\frac{1}{2}.$

3.2. Решение систем линейных уравнений способом сложения

При решении систем линейных уравнений с двумя переменными мы будем использовать два способа. Каждый из них опирается на свойства 1 и 2 и теорему из п. 3.1. Рассмотрим решение систем линейных уравнений с двумя переменными ***способом сложения***.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 5y = 3, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем уравнения данной системы так, чтобы коэффициенты при y стали противоположными числами. Для этого обе части первого уравнения умножим на 3, а обе части второго уравнения — на 5; при решении это обозначают так:

$$\begin{cases} 4x - 5y = 3, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 5 \end{array} \right.$$

После умножения уравнений системы на указанные числа получим систему, равносильную данной (см. теорему из п. 3.1):

$$\begin{cases} 12x - 15y = 9, \\ 10x + 15y = 35. \end{cases} \qquad (1)$$

Первое уравнение следующей системы перепишем из данной системы. Сложив почленно уравнения системы (1), запишем результат во второй строке и получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} 4x - 5y = 3, \\ 22x = 44; \end{cases}$$

$\downarrow$ разделив обе части второго уравнения на 22, получим $\downarrow$

$$\begin{cases} 4x - 5y = 3, \\ x = 2; \end{cases}$$

$\downarrow$ подставим 2 вместо x в первое уравнение $\downarrow$

$$\begin{cases} 8 - 5y = 3, \\ x = 2. \end{cases}$$

Откуда имеем

$$\begin{cases} y = 1, \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: (2; 1).

▲ Докажем, что при замене одного из уравнений системы (1) уравнением, полученным в результате сложения левых и сложения правых частей уравнений этой системы, получится равносильная ей система уравнений

$$\begin{cases} 12x - 15y = 9, \\ (12x - 15y) + (10x + 15y) = 9 + 35. \end{cases} \qquad (2)$$

Допустим, что система (1) имеет решение — пару чисел $(x_0; y_0)$. Это значит, что

$$12x_0 - 15y_0 = 9 \text{ и } 10x_0 + 15y_0 = 35 \qquad (3)$$

— верные числовые равенства. Тогда

$$12x_0 - 15y_0 = 9, \quad (12x_0 - 15y_0) + (10x_0 + 15y_0) = 9 + 35 \qquad (4)$$

— тоже верные числовые равенства. Таким образом, каждое решение системы (1) является решением системы (2).

Наоборот, пусть система (2) имеет решение и этим решением является пара чисел $(x_0; y_0)$. Значит, равенства (4) — верные числовые равенства. Тогда равенства (3) — тоже верные числовые равенства (равенства (4) получаются из равенств (3) посредством сложения, а равенства (3) получаются из равенств (4) посредством вычитания). Таким образом, каждое решение системы (2) является решением системы (1).

Итак, мы доказали, что системы (1) и (2) равносильны. ☒

Заметим, что уравнения системы из примера 1 можно преобразовать так, чтобы коэффициенты при x стали противоположными числами. Рассуждения будут аналогичными, и получится то же самое решение — (2; 1). ▲

На примере покажем, как можно оформить запись решения системы линейных уравнений в тетради.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = 4, \\ 12x + 7y = 10. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 3x + y = 4, & \big| \cdot (-4) \\ 12x + 7y = 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12x - 4y = -16, \\ 12x + 7y = 10; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 4, \\ 3y = -6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 4, \\ y = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2 = 4, \\ y = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = -2. \end{cases}$$

Ответ: (2; –2).

Пример 3. Решить систему уравнений способом сложения:

а) $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 6x - 4y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 6x - 4y = 8; \end{cases}$ в)* $\begin{cases} ax - 2y = 4, \\ 6x - 4y = 8. \end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases} 3x - 2y = 4, & \big| \cdot (-2) \\ 6x - 4y = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} -6x + 4y = -8, \\ 6x - 4y = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 0 \cdot x - 0 \cdot y = 1. \end{cases}$

Уравнение $0 \cdot x - 0 \cdot y = 1$ этой системы решений не имеет, значит, не имеет решений и сама система, а следовательно, и равносильная ей система а).

б) $\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 6x - 4y = 8; & \Big| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ -3x + 2y = -4; \end{cases} \qquad (5)$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ 0 \cdot x - 0 \cdot y = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы обращается в верное числовое равенство при любых значениях x и y, а решениями первого уравнения являются пары $\left(t; \frac{3t-4}{2}\right)$, где $t \in \boldsymbol{R}$.

Глядя на систему (5), можно было сразу заметить, что оба уравнения системы имеют одни и те же решения, и, решив одно из них, записать ответ.

▲ в) $\begin{cases} ax - 2y = 4, \\ 6x - 4y = 8; \end{cases} \Big| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{cases} ax - 2y = 4, \\ -3x + 2y = -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-3)x = 0, \\ -3x + 2y = -4. \end{cases} \qquad (6)$$

Если $a - 3 \neq 0$, т. е. $a \neq 3$, в первом уравнении системы (6), то она равносильна системе $\begin{cases} x = 0, \\ -3x + 2y = -4, \end{cases}$ откуда $x = 0$, $y = -2$.

Если $a - 3 = 0$, т. е. $a = 3$, то система (6) равносильна системе $\begin{cases} 0 \cdot x = 0, \\ -3x + 2y = -4. \end{cases}$ Решениями этой системы являются пары $\left(t; \frac{3t-4}{2}\right)$, где $t \in \boldsymbol{R}$.

Ответ: а) нет решений; б) $\left(t; \frac{3t-4}{2}\right)$, где $t \in \boldsymbol{R}$;

в) $(0; -2)$ при $a \neq 3$; $\left(t; \frac{3t-4}{2}\right)$, где $t \in \boldsymbol{R}$, при $a = 3$. ▲

1. В чем заключается способ сложения при решении систем линейных уравнений с двумя переменными?

2. Обязательно ли, используя способ сложения при решении систем линейных уравнений с двумя переменными, преобразовывать уравнения так, чтобы противоположными стали коэффициенты именно при y?

3*. На чем основан способ сложения при решении систем линейных уравнений с двумя переменными?

Упражнения

Решите систему линейных уравнений способом сложения (**3.15—3.16**).

3.15°. 1) $\begin{cases} x + y = 30, \\ x - y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 40, \\ x - y = 16; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5y + x = 44, \\ x + y = 16; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 3y = 4, \\ x - y = 14; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x + 8y = 19, \\ 6x - y = 4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x + 4y = 85, \\ 5x - 8y = 105; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + 5y = 25, \\ 3x + 2y = -3; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5x + 7y = 141, \\ 7x - y = 3; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 3x + 8y = -7, \\ 6x + 5y = -58; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 12x - 7y = 88, \\ 13x + 14y = 9. \end{cases}$

3.16°. 1) $\begin{cases} 7x - 3y + 1 = 0, \\ 4x - 5y + 17 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 25x - 4y + 1 = 0, \\ 31x - 5y + 16 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(3x + y) - 8(x - 6y) = 46, \\ 4(2x - 3y) - 13(x - y) = 6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 10(x - y) - 4(1 - x) = 4y, \\ 7(x + 2y) + 4(3x - y) = y - x; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3(x + 3) - 2(y - 2) = 12, \\ 3(x - 1) + 4(y + 1) = 48; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4(2x - 1) + 5(3y - 2) = 40, \\ 4(3x + 1) - 5(3y + 2) = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 20(x + 1) - 15(y + 2) = 24(x - y), \\ 3(x - 3) - 4(y - 3) = 12(2y - x); \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3(3x - 2y) + 5(5x - 3y) = 15(x + 1), \\ 2(2x - 3y) + 3(4x - 3y) = 6(y + 1). \end{cases}$

Решите систему уравнений (**3.17—3.18**).

3.17°. 1) $\begin{cases} 2x + 4y = 6, \\ y + 0{,}5x = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8 + x = 2y, \\ x + 4y = 10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 1{,}5y + x = 0{,}5, \\ 2x + 3y = -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3y = 11 - 2x, \\ 8x = 44 - 12y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5y - 15x = 0, \\ 9y - 3x = 18; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 12x - 3y = 5, \\ 6y + 10 = 24x; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 8y - 2x = 24, \\ 3y + x = -3; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 3x = 2, \\ -3x + 2y = -2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4 - y = 5x, \\ 6 = x + y; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 5x + 2y = -18, \\ 15x + 6y = -54; \end{cases}$

11) $\begin{cases} 8x + 20y = 3, \\ 2x + 5y = 16; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x + 1 = 6y, \\ 2x = 3 + 10y. \end{cases}$

3.18. 1) $\begin{cases} 3y - 4x = 17, \\ \frac{8x - 3y}{5} - \frac{y - 4x - 7}{10} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2y = \frac{2x - 6}{3} - \frac{x - 2}{2}, \\ \frac{y}{2} = x - \frac{3x - 6}{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{3x - 7}{4} - 1 = \frac{2y - 3}{5}, \\ \frac{2x - y}{2} - y + 1 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{5y - x}{3} - 11 = \frac{2y - x}{2}, \\ \frac{3y - x}{5} - y + 8 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{7x + 11}{16} + 2y + 5 = \frac{15 - x}{4} + 4x, \\ \frac{2y + 4}{3} + 2x = 3y - \frac{2x + y}{5}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{5x - 3y}{3} - x - 1 = \frac{2y - 3x}{5}, \\ \frac{2x - 3y}{3} - y - 1 = \frac{3y - 4x}{2}. \end{cases}$

Решите систему уравнений относительно x и y **(3.19—3.20).**

3.19*. 1) $\begin{cases} ax + 2y = 3, \\ 3x - ay = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} ax + 2y = 3, \\ 3x + ay = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x + 2y = 1, \\ 2x + 7y = a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7x - 3y = a, \\ 21x - 9y = 9. \end{cases}$

3.20*. 1) $\begin{cases} x + 2y = 3m, \\ 3x + 2my = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + my = 3, \\ 2x + 2my = 4m; \end{cases}$

3) $\begin{cases} mx - 2my = 6, \\ 5x - 5my = 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x - \frac{4}{3}my = 8, \\ mx - 27y = 2m. \end{cases}$

3.3. Решение систем линейных уравнений способом подстановки

Разберем на примерах еще один способ решения систем линейных уравнений — ***способ подстановки***.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 7, \\ 2x + 3y = -10. \end{cases} \quad (1)$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы, выразив y через x:

$$y = 3x - 7.$$

Так как это уравнение равносильно первому уравнению системы (1), то согласно теореме из п. 3.1 система

$$\begin{cases} y = 3x - 7, \\ 2x + 3y = -10 \end{cases} \quad (2)$$

равносильна системе (1).

Подставим во второе уравнение системы (2) вместо y выражение $3x - 7$. Получим систему

$$\begin{cases} y = 3x - 7, \\ 2x + 3(3x - 7) = -10. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) равносильна системе (2).

Преобразуя второе уравнение системы (3), получаем равносильную ей систему

$$\begin{cases} y = 3x - 7, \\ x = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Подставим значение $x = 1$ в первое уравнение системы (4) и решим полученное уравнение с неизвестным y:

$$y = 3 \cdot 1 - 7,$$
$$y = -4.$$

Пара чисел $x = 1$, $y = -4$ является единственным решением системы (4), а следовательно, и равносильной ей системы (1).

Ответ: $(1; -4)$.

Решение системы уравнений способом подстановки можно оформить, например, так.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 5y = 6, \\ 4x + 2y = 9. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Данная система уравнений равносильна следующей:

$$\begin{cases} x = 3 + \frac{5}{2}y, \\ 4\left(3 + \frac{5}{2}y\right) + 2y = 9. \end{cases}$$

Решим второе уравнение этой системы:

$$4(6 + 5y) + 2 \cdot 2y = 9 \cdot 2,$$
$$24 + 20y + 4y = 18,$$
$$24y = -6,$$
$$y = -\frac{1}{4}.$$

Итак, получили:

$$\begin{cases} x = 3 + \frac{5}{2}y, \\ y = -\frac{1}{4}, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = 2\frac{3}{8}, \\ y = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

О т в е т: $\left(2\frac{3}{8};\ -\frac{1}{4}\right)$.

Современные записи решений уравнений восходят к XVIII в. Для решения систем уравнений первым появился способ сложения, а затем способ подстановки. Во «Всеобщей арифметике» Ньютона (XVII в.) встречаются уже все способы решения систем уравнений, применяемые в настоящее время.

П р и м е р 3. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 2x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 2x + y = 3; \end{cases}$ в)* $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 2x + y = a. \end{cases}$

Р е ш е н и е. а) Решим систему способом подстановки:

$$\begin{cases} y = 7 - 2x, \\ 2x + (7 - 2x) = 5, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} y = 7 - 2x, \\ 7 = 5 \text{ — неверно.} \end{cases}$$

б) Решения каждого из уравнений этой системы, которые можно записать в виде $(t;\ 3 - 2t)$, где $t \in \boldsymbol{R}$ (см. п. 3.1, пример 2), и являются решениями данной системы.

Эти же решения получаются, когда систему уравнений решают способом сложения или способом подстановки. Решим ее, например, способом подстановки:

$$\begin{cases} y = 3 - 2x, \\ 2x + (3 - 2x) = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - 2x, \\ 0 \cdot x = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение этой системы обращается в верное числовое равенство при любых значениях x. А решениями первого уравнения являются пары $(t;\ 3 - 2t)$, где $t \in \boldsymbol{R}$.

▲ в) Заменим данную систему уравнений равносильной и решим ее:

$$\begin{cases} y = 7 - 2x, \\ 2x + 7 - 2x = a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 7 - 2x, & (5) \\ 0 \cdot x = a - 7. & (6) \end{cases}$$

Если $a - 7 = 0$, т. е. $a = 7$, то решением уравнения (6) является любое значение $x = t$, где $t \in \boldsymbol{R}$, и тогда из уравнения (5) находим $y = 7 - 2t$, где $t \in \boldsymbol{R}$.

Если $a - 7 \neq 0$, т. е. $a \neq 7$, то уравнение (6) не имеет решений и, значит, не имеет решений и система в).

Ответ: а) нет решений; б) $(t;\ 3 - 2t)$, где $t \in \boldsymbol{R}$; в) $(t;\ 7 - 2t)$, где $t \in \boldsymbol{R}$, при $a = 7$; нет решений при $a \neq 7$. ▲

?

1. В чем заключается способ подстановки при решении системы линейных уравнений с двумя переменными?
2*. На чем основано решение системы уравнений способом подстановки?
3. Обязательно ли, решая систему линейных уравнений способом подстановки, выражать из уравнения именно y через x?

Упражнения

Решите систему линейных уравнений способом подстановки (**3.21—3.23**).

3.21°. 1) $\begin{cases} 14x - y = 15, \\ 7x - 3y = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5y + 4x = 18, \\ 3y + x = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 5y = 31, \\ 2x + 7y = -31; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 7y = -25, \\ 4y - 9x = 30; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3y - 4x = 1, \\ 3x + 4y = 28; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 6x - 4y = 15, \\ 8x - 3y = 9; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x + 5y = 15, \\ 3x + 8y = -1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x + 3y = -4, \\ 5x + 6y = -7. \end{cases}$

3.22°. 1) $\begin{cases} 7x - 3y = 3, \\ 4x + 5y = -24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x - 3y = 3, \\ 21x - 9y = 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x - 3y = 3, \\ 14x - 6y = 9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 8x + 2y = 3, \\ 4x + y = -3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ -4x + 6y = -10; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x + 3y = 0, \\ 7x - 2y = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + y + 1 = 1, \\ 2x + 2y + 2 = 2; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 13x - 2y = 3, \\ 1,3x - 0,2y = -16. \end{cases}$

3.23°. 1) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 8, \\ \frac{2x}{3} - \frac{y}{4} = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{7x}{6} + \frac{5y}{3} = 17, \\ \frac{7x}{8} + \frac{y}{4} = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x + y}{3} + x = 14, \\ y - \frac{y - x}{5} = 12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1, \\ \frac{2x - 1}{2} - \frac{3y - 1}{3} = \frac{5}{6}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{3} = 8, \\ \frac{x + y}{3} + \frac{x - y}{4} = 11; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{x - y}{5} - \frac{x + y}{3} = 12, \\ \frac{x + y}{6} - \frac{x - y}{2} = 10; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{x + 3}{2} + \frac{2 - y}{3} = 2, \\ \frac{x - 1}{4} + \frac{y + 1}{3} = 4; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \frac{2x - 1}{5} - \frac{3y - 2}{4} = 2, \\ \frac{3x + 1}{5} = \frac{3y + 2}{4}. \end{cases}$

3.24. Решите систему уравнений (b — число)

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5, \\ 3y + bx = -9, \end{cases}$$

зная, что прямая $2x + by = 6$ проходит через точку:
1) $K(-3;\ 4)$; 2) $M(13;\ -5)$;
3) $T(-2;\ -1)$; 4) $P(-3;\ -2)$.

3.25*. Решите систему уравнений (a и b — числа):

1) $\begin{cases} x - y = 5a - 3b, \\ 2x + y = 4a - 6b; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 3y = 5a + 3b, \\ 3x - 4y = 5a - 3b; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 3a - 5b, \\ y - x = a + 7b; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6(x + y) = 4a + 9b, \\ 4x + 9y = 6a + 6b. \end{cases}$

3.26. Решите систему уравнений (m — число)

$$\begin{cases} 2x + my = 11, \\ 4x + 6y = 6, \end{cases}$$

если известно, что первому уравнению системы удовлетворяет пара чисел:

1) (–1; 3); 2) (2; 1); 3) (–2; 1); 4) (3; 2).

3.27. Решите систему уравнений (a — число)

$$\begin{cases} 5x + 2y = 12, \\ ax + 3y = 11, \end{cases}$$

если известно, что второму уравнению системы удовлетворяет пара чисел:

1) (5; –3); 2) (–3; 2); 3) (–1; –2); 4) (–2; –3).

3.28*. При каких значениях a решением системы уравнений с переменными x и y является упорядоченная пара положительных чисел:

1) $\begin{cases} x + y = a, \\ 3x - 2y = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x - ay = 1, \\ 5x - 9y = 9? \end{cases}$

3.29*. При каких значениях a решением системы уравнений с переменными x и y является упорядоченная пара отрицательных чисел:

1) $\begin{cases} 4x + 5y = 15, \\ 3x + 2y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 3y = 6, \\ -5x - ay = 8? \end{cases}$

3.30*. При каких значениях a система уравнений с переменными x и y не имеет решений:

1) $\begin{cases} 3x - 7y = 15, \\ 6x + ay = 60; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 5y = 7, \\ 7x - ay = 9? \end{cases}$

3.31*. При каких значениях a и b система уравнений с переменными x и y имеет бесконечно много решений:

1) $\begin{cases} ax - 6y = 15, \\ 4x + by = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} ax - y = b, \\ 4x + 3y = 10? \end{cases}$

3.4. График уравнения с двумя переменными. Уравнение прямой

Определение. ***Графиком уравнения с двумя переменными*** **называется множество всех точек на координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.**

! Графики равносильных уравнений совпадают.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$3x - 2y = 6. \qquad (1)$$

Выразим из него y через x:

$$y = \frac{3}{2}x - 3. \qquad (2)$$

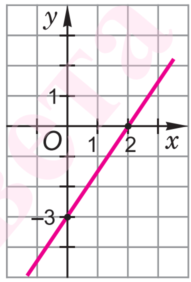


Рис. 123

Уравнения (1) и (2) равносильны и задают одно и то же множество точек на координатной плоскости.

Теперь заметим, что формула (2) задает линейную функцию, графиком которой является прямая (рис. 123). Значит, эта прямая является графиком уравнения (1).

Поэтому уравнение (1) есть уравнение прямой.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$0 \cdot x - 2y = 6. \qquad (3)$$

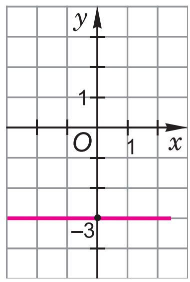


Рис. 124

Оно равносильно уравнению $y = -3$, поэтому графиком уравнения (3) является прямая, параллельная оси Ox (она изображена на рисунке 124).

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$3x - 0 \cdot y = 6. \qquad (4)$$

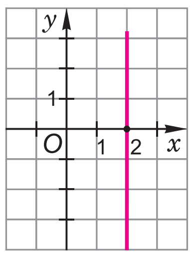


Рис. 125

Оно равносильно уравнению $x = 2$, поэтому графиком уравнения (4) является прямая, параллельная оси Oy (она изображена на рисунке 125).

Заметим, что график уравнения $x + 0 \cdot y = 2$ с двумя переменными не является графиком какой-либо функции y от переменной x (поясните почему).

Примеры 1—3 подсказывают формулировку следующей теоремы.

Теорема 1. Графиком уравнения первой степени с двумя переменными является прямая.

▲ Доказательство. Пусть a, b, c — числа и

$$ax + by = c \tag{5}$$

— уравнение первой степени ($a \neq 0$ или $b \neq 0$).

Если $b \neq 0$, то, выразив из уравнения (5) y через x, получим

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}. \tag{6}$$

Уравнения (5) и (6) равносильны, поэтому их графики совпадают. А так как формула (6) задает линейную функцию, графиком которой является прямая, то и графиком уравнения (5) является прямая.

Если $b = 0$, то уравнение (5) имеет вид $ax = c$, где $a \neq 0$, и равносильно уравнению

$$x = \frac{c}{a}. \tag{7}$$

А графиком уравнения (7) является прямая, параллельная оси Oy и проходящая через точку $\left(\frac{c}{a}; 0\right)$.

Таким образом, каждому уравнению первой степени соответствует прямая на координатной плоскости. ☒▲

Имеет место и обратное утверждение, которое мы примем без доказательства.

Теорема 2. Каждая прямая на координатной плоскости является графиком некоторого уравнения первой степени с двумя переменными.

! Таким образом, каждой прямой на координатной плоскости соответствует некоторое уравнение первой степени $ax + by = c$ (a, b, c — числа; $a \neq 0$ или $b \neq 0$).

Это уравнение называется ***уравнением прямой***.

Представление о линейном уравнении с двумя переменными как об уравнении некоторой прямой на координатной плоскости называется *геометрической интерпретацией линейного уравнения с двумя переменными*.

a Интерпретация (от латинского слова *interpretatio*) — толкование, объяснение, раскрытие смысла чего-либо.

Пример 4. Составить уравнение прямой, проходящей через точки (1; 3) и (–2; 7).

Решение. Абсциссы данных точек различные, следовательно, прямая, проходящая через них, не параллельна оси ординат и является графиком некоторой линейной функции

$$y = kx + m \ (k,\ m \text{ — числа}).$$

Поскольку эта прямая проходит через точку (1; 3), то будет верным числовое равенство

$$3 = k \cdot 1 + m.$$

Поскольку прямой принадлежит и точка (–2; 7), то верным является числовое равенство

$$7 = k(-2) + m.$$

Имеем систему уравнений с двумя неизвестными k и m:

$$\begin{cases} 3 = k + m, \\ 7 = -2k + m. \end{cases}$$

Решив ее, находим:

$$k = -1\frac{1}{3};\ \ m = 4\frac{1}{3}.$$

Таким образом, уравнение искомой прямой имеет вид

$$y = -1\frac{1}{3}x + 4\frac{1}{3}.$$

Ответ: $y = -1\frac{1}{3}x + 4\frac{1}{3}$.

Мы уже отмечали, что уравнениями с двумя переменными являются и формулы изученных нами функций: $y = x^2$; $y = x^3$; $y = \sqrt{x}$; $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ и т. д. Соответственно, графики этих функций являются и графиками, например, таких уравнений с двумя переменными, как

$$y - x^2 = 0;\ \ 3y - 3x^3 = 0;$$
$$2\left(y - \sqrt{x} + 0{,}5\right) = 1;\ \ \ xy = k \ (k \neq 0).$$

Пример 5. Изобразить график уравнения:

а) $3x - 2y = 9x - 5y + 12$; б) $1 - xy = 0$.

Решение. а) Перенесем (изменив соответственно знаки) все слагаемые с переменной y в левую часть, а все остальные — в правую:

$$-2y + 5y = 9x - 3x + 12;$$

$\downarrow$ после приведения подобных членов получим $\downarrow$

$$3y = 6x + 12;$$

$\downarrow$ разделив обе части уравнения на 3, получим $\downarrow$

$$y = 2x + 4.$$

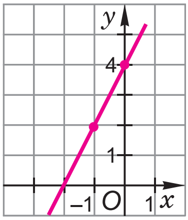


Рис. 126

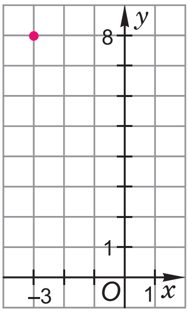


Рис. 127

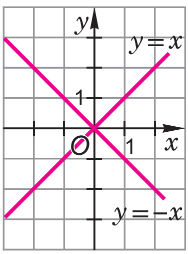


Рис. 128

Теперь можно изобразить график данной линейной функции — это прямая, которая проходит через точки (–1; 2) и (0; 4) (рис. 126).

б) Выразив переменную y из данного уравнения, получим

$$y = \frac{1}{x}.$$

Графиком этого уравнения является гипербола (см. п. 1.9, рис. 51).

Пример 6. Изобразить график уравнения:

а) $(x+3)^2+(y-8)^4=0$; б) $x^2-y^2=0$.

Решение. а) Данному уравнению удовлетворяет только одна упорядоченная пара чисел: $x=-3$ и $y=8$ (поясните почему), значит, графиком этого уравнения является единственная точка (–3; 8) (рис. 127).

б) Представив данное уравнение в виде

$$(x+y)(x-y)=0,$$

замечаем, что его левая часть принимает значение 0, если либо $x+y=0$, либо $x-y=0$.

Таким образом, график этого уравнения состоит сразу из двух прямых $y=-x$ и $y=x$ (рис. 128).

Обратите внимание: уравнение $x^2-y^2=0$ не задает функцию (объясните почему).

?

1. Что называется графиком уравнения с двумя переменными?
2. Какое уравнение называется уравнением прямой?
3. Приведите пример уравнения с двумя переменными, графиком которого является:

   а) парабола; б) прямая; в) гипербола.

4*. Верно ли, что график уравнения с двумя переменными всегда совпадает с графиком некоторой функции?

Упражнения

Изобразите график уравнения с двумя переменными **(3.32—3.36).**

3.32°. 1) $3x-2y=4$; 2) $5x-y=4$;

3) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=2$; 4) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$;

5) $3x + 2y = 5$; 6) $4x + 3y = 2$;
7) $0,5x - 0,3y = 0,7$; 8) $0,2x + 0,1y = 0,6$.

3.33°. 1) $6x + 8y = 3x - 12y + 5$;
2) $7x - 2y - 6 = 4x - 2y - 1$;
3) $2(x + y) - 10 = 8(x - y) + 15x - y$;
4) $5 - 6x = 3(x - y) + 4(y - x) - 8$;
5) $\frac{x+y}{3} = \frac{x-1}{5} - \frac{y-2}{15}$;
6) $\frac{x-y-1}{4} - 8 = \frac{x+y+5}{2} + \frac{x}{8} - \frac{y}{16}$.

3.34. 1) $5(x - y) - 4(2x - 3y) = 3(2y - x)$;
2) $6(2x - 3y) - 3(3x - 2y) = 2(x - 6y)$;
3) $3\left(\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}y\right) + 2\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y\right) = 4\left(\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}y\right)$;
4) $\frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x + y\right) = \frac{1}{2}(y - 6x)$.

3.35. 1) $0 \cdot x + 5y = 10$; 2) $0 \cdot x - 3y = 9$;
3) $4x + 0 \cdot y = -8$; 4) $6x - 0 \cdot y = 12$;
5) $y = -5$; 6) $y = 5$;
7) $x = 3$; 8) $x = -7$.

3.36. 1) $xy = 5$; 2) $xy = -2$;
3) $x^2 - y = 0$; 4) $\sqrt{x} - y = 0$;
5) $y - x^3 = 0$; 6) $x - y = 0$;
7) $xy + 3 = 0$; 8) $4 - xy = 0$.

В одной системе координат изобразите графики уравнений и укажите координаты их точек пересечения (если они есть) **(3.37—3.38).**

3.37. 1) $5x + 3y = 1$ и $10x + 6y = 2$;
2) $2x + 3y = 2$ и $6x + 9y = 4$;
3) $2x - 3y = 1$ и $-4x - 2y = 3$;
4) $4x - 7y = 3$ и $-12x + 21y = 9$;
5) $3x - 4y = 3$ и $-6x + 8y = 5$;
6) $5x + 2y = 2$ и $-3x - 4y = 1$.

3.38. 1) $y - x^2 = 0$ и $4 - 2x = 0$; 2) $x^3 - y = 0$ и $y = -2$.

3.39. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки:
1) (1; 2) и (–1; 8); 2) (4; 6) и (2; 12);
3) (–6; 1) и (–5; –8); 4) (3; –1) и (–6; 1).

3.40. Решите систему уравнений (a — число)

$$\begin{cases} 5y - 4x = 7, \\ 2x + ay = -5, \end{cases}$$

зная, что прямая $ax + 5y = 9$ проходит через точку:
1) $K(2; 3)$; 2) $M(-10; 5)$.

3.41. Найдите коэффициент k, если прямая $y = kx$ проходит через точку пересечения прямых:
1) $3x - y = 20$ и $5y + 7x = -12$;
2) $y = 5x - 3$ и $2y - 3x = 15$.

3.5. Геометрическая интерпретация системы двух линейных уравнений с двумя переменными

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Будем считать, что хотя бы один из коэффициентов a_1, b_1 не равен нулю и что хотя бы один из коэффициентов a_2, b_2 не равен нулю. Тогда каждое уравнение системы (1) является уравнением прямой.

Если координаты точки $M(x_0; y_0)$ удовлетворяют первому уравнению системы (1), то точка M лежит на прямой, которая определяется первым уравнением. Если координаты точки $M(x_0; y_0)$ удовлетворяют второму уравнению системы (1), то точка M лежит на прямой, которая определяется вторым уравнением. Значит, если координаты точки M удовлетворяют обоим уравнениям системы (1), т. е. $(x_0; y_0)$ — решение этой системы, то точка M лежит на обеих прямых (рис. 129).

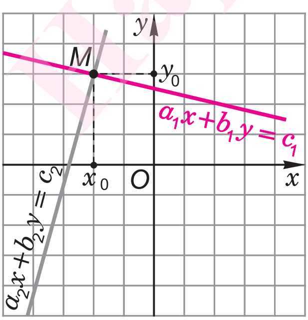


Рис. 129

Наоборот, если точка $M(x_0; y_0)$ лежит на обеих прямых, определяемых уравнениями системы (1), то ее координаты $(x_0; y_0)$ удовлетворяют каждому уравнению системы, т. е. являются решением системы.

Приведем три примера — они соответствуют возможным случаям взаимного расположения прямых, определяемых уравнениями системы (1).

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - 2y = 7. \end{cases} \qquad (2)$$

На координатной плоскости (рис. 130) изображены прямые, определяемые уравнениями системы (2). Мы видим, что эти прямые пересекаются в точке $M(x_0;\ y_0)$, где $x_0 = 3$, $y_0 = -2$. Значит, система (2) имеет единственное решение $x = 3$, $y = -2$.

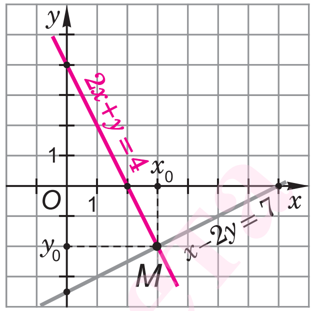


Рис. 130

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 6x + 3y = 2. \end{cases} \qquad (3)$$

На координатной плоскости (рис. 131) изображены прямые, определяемые уравнениями системы (3). Мы видим, что эти прямые параллельны и не совпадают. Значит, система (3) не имеет решений.

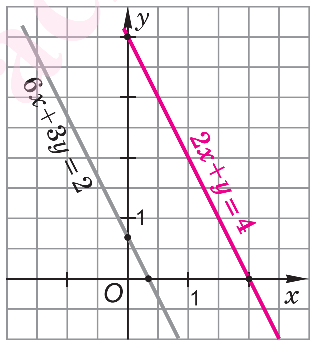


Рис. 131

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 6x + 3y = 12. \end{cases} \qquad (4)$$

Уравнения системы (4) равносильны (второе уравнение получается из первого умножением на 3), значит, их графики совпадают, т. е. это одна и та же прямая (рис. 132). Координаты любой точки $M(x_0;\ y_0)$ на этой прямой являются решением системы (4). Значит, система (4) имеет бесконечно много решений. Пусть $x_0 = t$, тогда решения имеют вид $(t;\ 4 - 2t)$, где $t \in \boldsymbol{R}$.

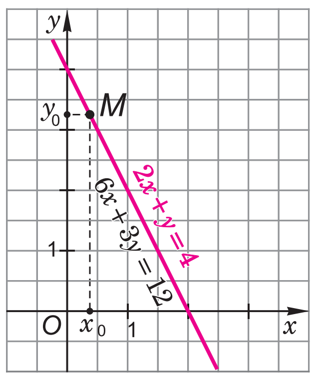


Рис. 132

Таким образом, рисунки 130, 131, 132 позволяют судить о числе решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

Возможны три случая.

1. *Система имеет единственное решение, когда прямые, определяемые уравнениями системы, пересекаются.*

2. *Система не имеет решений, когда прямые, определяемые уравнениями системы, параллельны и не совпадают.*

3. *Система имеет бесконечно много решений, когда прямые, определяемые уравнениями системы, совпадают.*

Замечание. Графики уравнений можно использовать и для решения систем. Однако следует помнить, что значения переменных, найденные по графику уравнения, как правило, получаются приближенными, поскольку зависят от точности инструментов, которые используются для его изображения.

! Судить о числе решений системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно и не прибегая к геометрической интерпретации. Из разобранных примеров видно, что случаи 2 и 3 имеют место, когда коэффициенты при переменных в уравнениях системы пропорциональны. Если при этом свободные члены и коэффициенты при переменных не пропорциональны, то система не имеет решений. А если свободные члены и коэффициенты при переменных пропорциональны, то система имеет бесконечно много решений. В случае 1 коэффициенты при переменных не пропорциональны. Таким образом, когда в системе (1) все коэффициенты при переменных и свободные члены отличны от нуля, это можно записать так:

1. Система (1) имеет единственное решение, когда

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

2. Система (1) не имеет решений, когда

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

3. Система (1) имеет бесконечно много решений, когда

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Пример 4. Сколько решений имеет система (укажите их):

а) $\begin{cases} 4x + 3y = 1, \\ 4x + 5y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + 3y = 1, \\ 8x + 6y = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x + 3y = 1, \\ 8x + 6y = 3? \end{cases}$

Р е ш е н и е.

а) $\frac{4}{4} \neq \frac{3}{5}$. Следовательно, система имеет единственное решение $\left(\text{это пара } \left(\frac{1}{4};\ 0\right)\right)$.

б) $\frac{4}{8} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Следовательно, система имеет бесконечно много решений $\left(\text{это все пары вида } \left(t;\ \frac{1-4t}{3}\right), \text{ где } t \in \boldsymbol{R}\right)$.

в) $\frac{4}{8} = \frac{3}{6} \neq \frac{1}{3}$. Следовательно, система не имеет решений.

П р и м е р 5*. При каких значениях p система

$$\begin{cases} px + 12y = 4, \\ 3x + py = -2: \end{cases}$$

а) имеет единственное решение;
б) имеет бесконечно много решений;
в) не имеет решений?

Р е ш е н и е. а) Система имеет единственное решение, когда $\frac{p}{3} \neq \frac{12}{p}$, т. е. когда $p \neq 6$ и $p \neq -6$.

б) Система имеет бесконечно много решений, когда $\frac{p}{3} = \frac{12}{p}$ и $\frac{p}{3} = \frac{4}{-2}$. Отсюда получаем $p = -6$.

в) Система не имеет решений, когда $\frac{p}{3} = \frac{12}{p}$ и $\frac{p}{3} \neq \frac{4}{-2}$. Отсюда получаем $p = 6$.

О т в е т: а) при $p \neq \pm 6$; б) при $p = -6$; в) при $p = 6$.

?

1. В каком случае линейными уравнениями системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

определяются две прямые, которые:

а) пересекаются;
б) параллельны;
в) совпадают?

2. В каком случае система линейных уравнений с двумя переменными и отличными от нуля коэффициентами и свободными членами:

а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечно много решений?

Упражнения

3.42°. Изобразите прямые, уравнения которых записаны в системе, и укажите число решений системы:

1) $\begin{cases} y = 3x, \\ y = -2 + x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 8x, \\ y + x = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 5 - 2x, \\ 2x + y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = 6 - x, \\ x + y = 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x - 2y = 4, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x + 2y = 6, \\ 3x + y = 1. \end{cases}$

3.43°. Изобразите в одной системе координат прямые $y = 4x$ и $y - x = 3$. Имеют ли они точку пересечения? Укажите координаты точки, которая обращает каждое из уравнений в верное равенство.

3.44°. Укажите число решений системы:

1) $\begin{cases} 2x + y = 6, \\ 2x - y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + y = 4, \\ x + 2y = -4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y = 2, \\ 3y + 6x = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x - y + 5 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y = 6, \\ 2x + 2y = 4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x + 3y - 6 = 0, \\ 3x + 9y - 4 = 0. \end{cases}$

3.45°. Покажите, что система уравнений не имеет решений:

1) $\begin{cases} y = 4x, \\ 4x - y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x = 0, \\ 4x - 4y = -\frac{1}{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 6, \\ 2x = 1 - 2y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 1, \\ 2x = 1 + 2y. \end{cases}$

3.46°. Покажите, что система уравнений имеет бесконечно много решений, и запишите их:

1) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 5x + 5y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 6x - 6y = 18; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 4x - 2y = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7x + y = 14, \\ 14x + 2y = 28. \end{cases}$

3.47°. Запишите решение каждой системы уравнений из упражнения **3.44**.

3.48°. Покажите, что система уравнений имеет единственное решение, и найдите его:

1) $\begin{cases} 5x + 2y = 13, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 3y = 6, \\ 2x + y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x - 4y = 5, \\ x + 2y = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x - 4y = 2, \\ x - 3y = 1. \end{cases}$

3.49. Укажите, какие из систем уравнений:

а) не имеют решений;
б) имеют единственное решение;
в) имеют бесконечно много решений.

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x + y = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 6, \\ x - y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 8, \\ 2x + 2y = 16; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 8; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x - y = 4; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x - y = 2, \\ 2x + y = 14; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x - y = 5, \\ 4x - 4y = 20; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x - 2y = 5; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x = 4 - y, \\ y = 4 - x; \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x + y = 15, \\ y = 3x; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 2x = 1 - y, \\ y = x - 5. \end{cases}$

3.50*. Какой из рисунков (рис. 133) является геометрической интерпретацией системы уравнений:

1) $\begin{cases} 2x + 5y = m^2, \\ 4x + 10y = 2m^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 5y = m^2 + 2, \\ 2x + 5y = -m^2 - 2; \end{cases}$

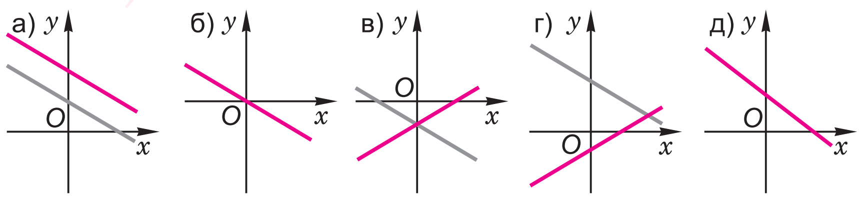


Рис. 133

3) $\begin{cases} 2x + 5y = m^2, \\ 4x + 10y = m^2 + 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 5y = m^2 + 1, \\ x + 7y = m^2 + 2? \end{cases}$

3.51*. Известно, что система двух линейных уравнений с двумя неизвестными x и y

$$\begin{cases} mx + ny = k, \\ px + ly = q \end{cases}$$

(числа m, n, k, p, l, q отличны от нуля) имеет бесконечно много решений. Верно ли, что:

1) любая упорядоченная пара чисел является решением этой системы;

2) решения системы можно записать в виде

$$\left(t; \frac{q - pt}{l}\right), \text{ где } t \in \boldsymbol{R};$$

3) решения системы можно записать в виде

$$\left(t; \frac{k - mt}{n}\right), \text{ где } t \in \boldsymbol{R};$$

4) решения системы можно записать в виде

$$(x_0; y_0), \text{ где } x_0 \in \boldsymbol{R};\ y_0 \in \boldsymbol{R};$$

5) имеет место равенство $\frac{n}{l} = \frac{k}{q}$;

6) имеет место равенство $pk = mq$;

7) имеет место равенство $mn = pl$;

8) имеет место равенство $\frac{q - px_0}{l} = \frac{k - mx_0}{n}$, где $x_0 \in \boldsymbol{R}$?

3.52*. Укажите, при каких значениях k система уравнений: а) имеет решения; б) не имеет решений.

1) $\begin{cases} 2x - 2y = 7k, \\ x - y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 4y = 5k, \\ y = -x + 1. \end{cases}$

3.53*. Составьте уравнения прямых AD и CD, проходящих через вершины параллелограмма $ABCD$, и найдите координаты точки D, если:

1) $A(-2; -3)$, $B(1; 3)$, $C(5; 4)$;
2) $A(-1; -1)$, $B(2; 2)$, $C(8; 0)$;
3) $A(-1; 2)$, $B(-2; 4)$, $C(4; -2)$;
4) $A(-2; -2)$, $B(0; -4)$, $C(-4; -2)$.

3.54*. Существуют ли такие значения m, при которых прямая

$$(m + 3)x + my = m + 1:$$

1) параллельна прямой $3x - 2y = 7$;
2) пересекает прямую $5x + 4y = 1$;
3) совпадает с прямой $9x - 6y = 7$;
4) параллельна прямой $4x - 3y = 5$;
5) пересекает прямую $2x + 5y = 2$;
6) совпадает с прямой $5x - 2y = 3$?

3.55*. Укажите, при каких значениях a, b и c система уравнений:

а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечно много решений.

1) $\begin{cases} ax + 3y = c, \\ 2x + by = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + ay = 6, \\ bx + 8y = c. \end{cases}$

3.6. Расстояние между двумя точками. Уравнение окружности

Выведем ***формулу для вычисления расстояния между двумя точками на координатной плоскости***. Начнем с простой задачи.

Пример 1. Пусть $A(x_1)$ и $B(x_2)$ — точки на координатной прямой. Доказать, что расстояние между этими точками находится по формуле

$$AB = |x_2 - x_1|.$$

Доказательство. На рисунке 134 изображены все возможные случаи взаимного расположения трех точек: A, B и O (начало отсчета на координатной прямой). Напомним, что

$$AO = OA = |x_1| \quad \text{и} \quad BO = OB = |x_2|.$$

Рассмотрим случай а). Поскольку $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ и $x_1 < x_2$, то $AB = OA - OB = |x_1| - |x_2| = -x_1 - (-x_2) = x_2 - x_1 = |x_2 - x_1|$.

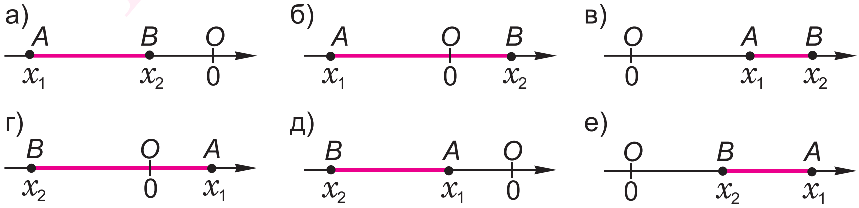


Рис. 134

Убедитесь, что в каждом из случаев б)—е) расстояние AB также равно значению выражения $|x_2 - x_1|$. ☒

Теорема 1. Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ — точки на координатной плоскости. Тогда расстояние между этими точками находится по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1)$$

▲ Доказательство.

Пусть точки A и B расположены на координатной плоскости так, как это изображено на рисунке 135.

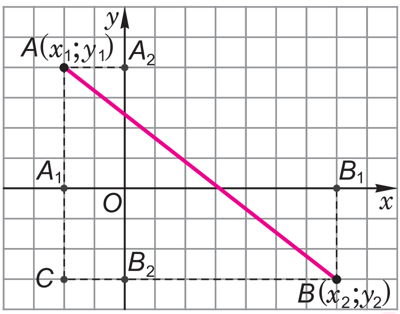


Рис. 135

Обозначим буквами A_1 и A_2 проекции точки A на координатные оси Ox и Oy, буквами B_1 и B_2 — проекции точки B на оси Ox и Oy, а буквой C — точку пересечения прямых AA_1 и BB_2.

Длины отрезков AC и A_2B_2 равны, а по формуле расстояния между двумя точками на координатной прямой длина отрезка A_2B_2 равна $|y_2 - y_1|$.

Таким образом,

$$AC = A_2B_2 = |y_2 - y_1|.$$

Аналогично

$$BC = A_1B_1 = |x_2 - x_1|.$$

Из прямоугольного треугольника ABC по теореме Пифагора имеем

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2.$$

Откуда находим

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \ ☒$$

Заметим, что все наши рассуждения остаются в силе и для любого другого расположения точек на координатной плоскости, когда отрезок AB не параллелен ни одной из координатных осей.

Докажите самостоятельно, что по формуле (1) можно находить расстояние между двумя точками и тогда, когда отрезок AB параллелен одной из координатных осей. ▲

***Окружность* — это множество всех точек плоскости, расстояние от которых до некоторой точки K (центра окружности) равно числу R (радиусу окружности).**

Теорема 2. Если точка лежит на окружности с центром в точке $K(a;\ b)$ и радиусом R, то ее координаты удовлетворяют уравнению

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (2)$$

Наоборот, если координаты точки удовлетворяют уравнению (2), то она лежит на окружности с центром в точке $K(a;\ b)$ и радиусом R.

Доказательство. Пусть точка $M(x_0;\ y_0)$ лежит на окружности с центром в точке $K(a;\ b)$ и радиусом R (рис. 136). Расстояние между точками $M(x_0;\ y_0)$ и $K(a;\ b)$ определяется по формуле (1):

$$MK=\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}. \qquad (3)$$

Поскольку $MK=R$, то

$$\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}=R.$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат, убеждаемся, что координаты точки $M(x_0;\ y_0)$ удовлетворяют уравнению (2).

Наоборот, пусть координаты точки $M(x_0;\ y_0)$ удовлетворяют уравнению (2), т. е. $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2$.

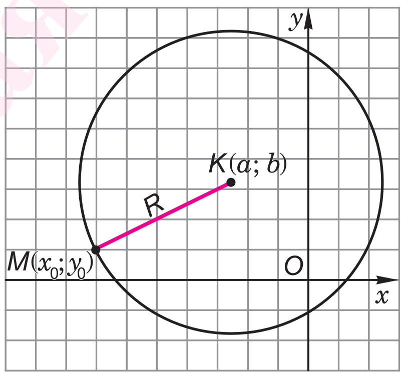


Рис. 136

Тогда, воспользовавшись равенством (3), получаем, что $MK=R$, т. е. точка $M(x_0;\ y_0)$ лежит на окружности с центром в точке $K(a;\ b)$ и радиусом R. ☒

Уравнение (2) называется ***уравнением окружности с центром в точке K(a; b) и радиусом R***.

Пример 2. Записать уравнение окружности с центром в точке K и радиусом R, если:

а) $K(-5;\ -3)$, $R=4$; б) $K(0;\ 0)$, $R=7$.

Р е ш е н и е. а) Подставив в уравнение окружности с центром в точке $K(a;\ b)$ и радиусом R значения $a = -5$, $b = -3$ и $R = 4$, получим уравнение данной окружности:

$$(x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

б) Аналогично запишем:

$$x^2 + y^2 = 49.$$

! Обратите внимание, что равенство $x^2 + y^2 = R^2$ является ***уравнением окружности с центром в начале координат и радиусом R***.

П р и м е р 3. Доказать, что уравнение

$$y^2 - 4y + 10x + x^2 + 13 = 0$$

является уравнением окружности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем левую часть данного уравнения, выделив в ней полные квадраты двучленов:

$$y^2 - 4y + 10x + x^2 + 13 =$$
$$= y^2 - 2 \cdot 2y + 2^2 - 2^2 + x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 - 5^2 + 13 =$$
$$= (y - 2)^2 - 4 + (x + 5)^2 - 25 + 13 = (y - 2)^2 + (x + 5)^2 - 16.$$

Таким образом, исходное уравнение можно записать в виде $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

Это уравнение окружности с центром в точке $K(-5;\ 2)$ и радиусом $R = 4$. ☒

?

1. Запишите формулу расстояния между точками:
а) $A(x_1)$ и $B(x_2)$ на координатной прямой;
б) $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ на координатной плоскости.

2. Запишите уравнение окружности:
а) с центром в точке $P(m;\ t)$ и радиусом R;
б) с центром в точке $O(0;\ 0)$ и радиусом R.

3*. Докажите утверждение из примера 1 для каждого из возможных шести случаев размещения точек A и B на координатной прямой относительно точки O.

4*. Докажите теорему о расстоянии между точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$.

5. Докажите, что если точка $M(x_0;\ y_0)$ принадлежит окружности с центром в точке $P(t;\ k)$ и радиусом R, то ее координаты удовлетворяют уравнению $(x - t)^2 + (y - k)^2 = R^2$.

6. Докажите, что если координаты точки $N(x_1;\ y_1)$ удовлетворяют уравнению $(x - t)^2 + (y - k)^2 = R^2$, то точка N принадлежит окружности с центром в точке $P(t;\ k)$ и радиусом R.

7*. Докажите, что если $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, то точка $C\left(\frac{x_1 + x_2}{2};\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ — середина отрезка AB.

Упражнения

3.56°. Найдите расстояние между точками A и B на координатной прямой, если:

1) $A(-6)$ и $B(12)$;
2) $A(14)$ и $B(-9)$;
3) $A(-18)$ и $B(-35)$;
4) $A(8)$ и $B(-17)$;
5) $A\left(1\frac{2}{5}\right)$ и $B\left(8\frac{7}{15}\right)$;
6) $A\left(-14\frac{3}{7}\right)$ и $B\left(-3\frac{5}{14}\right)$;
7) $A\left(9\frac{3}{8}\right)$ и $B\left(-4\frac{9}{16}\right)$;
8) $A\left(-49\frac{5}{11}\right)$ и $B\left(17\frac{13}{22}\right)$.

3.57. Найдите:
а) расстояние между точками A и B на координатной плоскости,
б)* координаты точки C — середины отрезка AB если:

1) $A(-4;\ 2)$ и $B(-3;\ 9)$;
2) $A(1;\ 8)$ и $B(9;\ -3)$;
3) $A(12;\ 4)$ и $B(-1;\ 5)$;
4) $A(-3;\ 12)$ и $B(7;\ 8)$;
5) $A(2;\ -5)$ и $B(0;\ 3)$;
6) $A(1;\ 2)$ и $B(-6;\ 0)$;
7) $A(5;\ -3)$ и $B(0;\ 0)$;
8) $A\left(-2\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ и $B(-1;\ 1)$.

3.58. Запишите уравнение окружности с центром в точке P и радиусом R, если:

1) $P(-2;\ 10)$, $R = 6$;
2) $P(0;\ 6)$, $R = 5$;
3) $P(3;\ 0)$, $R = 1$;
4) $P(-1;\ -1)$, $R = 3$;
5) $P(-4;\ -8)$, $R = \sqrt{3}$;
6) $P(8;\ -9)$, $R = \sqrt{5}$;
7) $P(-3;\ 1)$, $R = \sqrt{7} + 1$;
8) $P(3;\ 3)$, $R = \sqrt{2} - 1$.

3.59*. Укажите координаты точек пересечения окружности с осями Oy и Ox:

1) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 36$;
2) $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 49$;
3) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$;
4) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$;
5) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 100$;
6) $(x - 6)^2 + (y + 5)^2 = 81$.

3.60*. Докажите, что указанное уравнение является уравнением окружности:

1) $x^2 - 2x + y^2 + 6y = -9$;
2) $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 1 = 0$;
3) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10 = 0$;
4) $x^2 + y^2 - 2x - 20y + 97 = 0$;
5) $x^2 + y^2 + 12x + 10y = -60$;
6) $x^2 + y^2 - 8x + 8y = -23$.

3.61. Запишите уравнение окружности с центром в начале координат, проходящей через точку:

1) $M(-3; 4)$; 2) $P(2; -7)$;
3) $K(-5; -3)$; 4) $T(-1; -9)$.

3.62*. Запишите уравнение окружности с диаметром AB, если:

1) $A(1; 3)$, $B(-7; -3)$; 2) $A(3; -2)$, $B(-5; -8)$;
3) $A(-2; 7)$, $B(6; 1)$; 4) $A(-4; -5)$, $B(-2; 3)$.

3.63. Запишите уравнения прямых, которые содержат медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC, если:

1) $A(-2; 1)$, $B(5; 3)$, $C(8; -2)$;
2) $A(-4; -2)$, $B(3; -4)$, $C(11; 2)$;
3) $A(-4; 3)$, $B(-5; -4)$, $C(8; 2)$;
4) $A(10; 3)$, $B(-1; 2)$, $C(1; 5)$.

3.7. Системы, состоящие из уравнения первой и уравнения второй степени с двумя переменными

С уравнениями первой степени с двумя переменными мы уже знакомы (см. п. 3.1).

Определение. ***Уравнением второй степени с двумя переменными x и y*** **называется уравнение вида**

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов a, b, c не равен нулю.

Рассмотрим системы, состоящие из уравнения первой степени и уравнения второй степени. Такие системы всегда можно решить способом подстановки.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 8xy - 2y^2 + 3x - y - 2 = 0, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем второе уравнение данной системы, выразив y через x:

$$y = 2x - 1.$$

Подставим это выражение вместо y в первое уравнение данной системы:

$$2x^2 + 8x(2x - 1) - 2(2x - 1)^2 + 3x - (2x - 1) - 2 = 0.$$

После преобразований получим

$$10x^2 + x - 3 = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения:

$$x_1 = -0{,}6; \qquad x_2 = 0{,}5.$$

Вычислим соответствующие значения y:

$$y_1 = -2{,}2; \qquad y_2 = 0.$$

Ответ: (–0,6; –2,2), (0,5; 0).

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 5x^2 + 4xy + 13 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 5x^2 + 4xy + 13 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x - 1}{2}, & (1) \\ 5x^2 + 4x\left(\dfrac{3x - 1}{2}\right) + 13 = 0. & (2) \end{cases}$$

Решим уравнение (2):

$$5x^2 + 6x^2 - 2x + 13 = 0,$$
$$11x^2 - 2x + 13 = 0,$$
$$D = 4 - 4 \cdot 11 \cdot 13 < 0,$$

значит, корней нет и данная система не имеет решений.

Ответ: решений нет.

В некоторых случаях систему уравнений рациональнее решать способом сложения.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 9x^2 - 35 - 4y^2 = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Решение. Система уравнений (3) равносильна системе

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ (3x + 2y)(3x - 2y) = 35. \end{cases}$$

Подставив во второе уравнение вместо $3x + 2y$ число 7 и разделив обе части этого уравнения на 7, получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$$

Применив способ сложения, переходим к системе

$$\begin{cases} 6x = 12, \\ 4y = 2, \end{cases}$$

откуда находим $x = 2$ и $y = 0{,}5$.

Ответ: (2; 0,5).

?

1. Что называется уравнением первой степени с двумя переменными?
2. Что называется уравнением второй степени с двумя переменными?
3. Что значит решить систему уравнений с двумя переменными?
4. Что называется решением системы уравнений с двумя переменными?

5*. Обоснуйте, почему способом подстановки всегда можно решить систему уравнений с двумя переменными, состоящую из уравнений второй и первой степени.

Упражнения

3.64°. Установите, какую степень (первую или вторую) имеет уравнение с двумя переменными x и y:

1) $a^2x - 3by = 5$;
2) $4x - 5xy = 7$;
3) $(x - y)^2 + 5x - 7y = (y - x)^2$;
4) $4x + y^2 - 3xy = 2y - y(3x - y)$;
5) $5x - 7y^2 - 3xy = 2y + y(3x - 1)$;
6) $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 3x + 4y - 1$;
7) $(x - 1)(y + 2) = xy - 5x^2$;
8) $(x + 4)(y - 1) = 7y + xy$.

3.65. Найдите координаты точек пересечения (если они есть) окружности:

1) $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$ и прямой $y = -1$;
2) $(x - 8)^2 + (y + 4)^2 = 16$ и прямой $y = 2$;
3) $(x + 8)^2 + (y - 4)^2 = 49$ и прямой $y = x + 2$;
4) $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 121$ и прямой $y = x - 7$;
5) $(x - 3)^2 + (y - 8)^2 = 36$ и прямой $3x - 4y = 7$;
6) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$ и прямой $5x + 12y = 14$;
7) $x^2 + y^2 = 16$ и параболы $y = x^2 + 2$;
8) $x^2 + y^2 = 9$ и параболы $y = x^2 + 4$;
9) $x^2 + y^2 = 25$ и параболы $y = -x^2 - 5$;
10) $x^2 + y^2 = 4$ и параболы $y = -x^2 - 4$.

Решите систему уравнений **(3.66—3.69).**

3.66°. 1) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 - y^2 = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 4x^2 - y^2 - 15 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ 9x^2 - y^2 + 7 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x + 3y = 2, \\ 16x^2 - 9y^2 = -20; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x - 7y = 19, \\ 25x^2 + 171 = 49y^2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^3 + x^2y = 12; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y^6 + y^4x^2 = 80. \end{cases}$

3.67. 1) $\begin{cases} 9x^2 + 16y^2 - 24xy + 7y = 9, \\ 3x - 4y = 10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x + 2y = 14, \\ 25x^2 + 20xy + 4y^2 - 3x = 184; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 + 4x - 8y = 5, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 - 4x + 5y = -15, \\ 3x + 2y = -1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 4x^2 + 12xy + 8y^2 - 5y = 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4x - 3y = 6, \\ 16x^2 + 10y^2 - 24xy + y = 42; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 - xy = 8, \\ y^2 - xy = -4. \end{cases}$

3.68. 1) $\begin{cases} 2x^2 - 3y^2 + 4x - 8y = 5, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - xy + 7y = 9, \\ 3x - 4y = 10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3x + 4y^2}{6} - \dfrac{2x^2 - 4y}{5} = -\dfrac{2}{15}, \\ 3x - 2y = 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{7y^2 - 7y}{7} - \dfrac{4x^2 + 2xy}{5} = 0{,}4, \\ 2x + 5y = -1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + 9x + 6y = 12, \\ \dfrac{x + 3y}{2} + \dfrac{x - 7y}{3} = 5\dfrac{5}{6}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2y^2 - 5y + 17x = 100, \\ \dfrac{8x + 9y}{6} - \dfrac{x - 7y}{4} = 13; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - xy - 2x - y}{6} - \dfrac{4y^2 - 2x^2 + 9x + 4y}{3} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2x + 4y}{3} - \dfrac{3x + 7y}{5} = \dfrac{4}{15}; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2 + 2x - 3y - 4}{3} + \dfrac{11x - y + xy}{6} = 19\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2x - 4y}{3} - \dfrac{5x - 11y}{8} = \dfrac{5}{12}. \end{cases}$

3.69. 1) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x + 5|y| = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 7y = 5, \\ 3|x| + y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + 4y = 10, \\ 4x + 3|y| = 11; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x + 6y = 28, \\ |x| + 9y = 29. \end{cases}$

3.8. Использование систем уравнений при решении текстовых задач

Покажем на конкретных примерах, как можно использовать системы уравнений при решении текстовых задач.

Пример 1. Сумма двух целых чисел равна 79, а их произведение равно 1254. Найти эти числа.

Решение. Пусть x — одно из чисел, а y — другое. Тогда по условию задачи составим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 79, \\ xy = 1254. \end{cases}$$

Решим эту систему:

$$\begin{cases} x = 79 - y, & (1) \\ (79 - y)y = 1254. & (2) \end{cases}$$

Решим уравнение (2):

$$79y - y^2 = 1254,$$

$$y^2 - 79y + 1254 = 0,$$

$$D = 79^2 - 4 \cdot 1254 = 6241 - 5016 = 1225 = 35^2,$$

$$y_1 = \frac{79 - 35}{2} = 22, \quad y_2 = \frac{79 + 35}{2} = 57.$$

Из уравнения (1) получим соответственно:

$$x_1 = 57, \qquad x_2 = 22.$$

Ответ: 22 и 57.

Пример 2. Степа и Настя, готовясь к олимпиаде по математике, еженедельно обменивались информацией о числе решенных задач из сборника. В первую неделю выяснилось, что Настя решила на 24 задачи больше, чем Степа. В следующую неделю, после того как каждый решил еще по 19 задач, оказалось, что Степа решил в два раза меньше задач, чем Настя. Сколько задач решил каждый?

Решение. Пусть Степа решил в первую неделю x задач, а Настя — y задач. Согласно условию $y - x = 24$. За две недели Степа решил $x + 19$, а Настя $y + 19$ задач. По условию $2(x + 19) = y + 19$. Таким образом, составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y - x = 24, \\ 2(x + 19) = y + 19; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 24 + x, \\ 2(x + 19) = 24 + x + 19; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 29, \\ x = 5. \end{cases}$$

Степа решил всего $x + 19$ задач, т. е. $5 + 19 = 24$, а Настя решила всего $y + 19$ задач, т. е. $29 + 19 = 48$.

Ответ: 24 задачи; 48 задач.

Пример 3. Конфеты «Белорусские» и «Ромашка» для транспортировки упакованы в коробки разной вместимости. Известно, что 4 коробки с конфетами «Белорусские» и 5 коробок с конфетами «Ромашка» имеют массу 55 кг, а если в этом наборе три коробки с конфетами «Ромашка» заменить на три коробки с конфетами «Белорусские», то масса всех конфет будет 49 кг. Найти массу одной коробки с конфетами «Белорусские» и коробки с конфетами «Ромашка».

Решение. Пусть x кг — масса коробки с конфетами «Белорусские», а y кг — с конфетами «Ромашка». По условию задачи запишем уравнение $4x + 5y = 55$, а после обмена коробок получим уравнение вида $7x + 2y = 49$.

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} 4x + 5y = 55, \\ 7x + 2y = 49. \end{cases}$$

Решим эту систему методом сложения:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 55, \\ 7x + 2y = 49; \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot 5 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} -8x - 10y = -110, \\ 35x + 10y = 245; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 5y = 55, \\ 27x = 135. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $x = 5$.

Подставив $x = 5$ в первое уравнение системы, получим:

$$y = 11 - \frac{4}{5} \cdot 5 = 7.$$

Ответ: 5 кг; 7 кг.

Пример 4. Известно, что фильтр от сигареты разлагается в природе на 10 лет дольше, чем консервная банка. Если для их изготовления по новейшим технологиям использовать материалы, которые разлагаются под воздействием света, то время разложения фильтра можно уменьшить в 2 раза, а консервной банки — в 5 раз, причем фильтр будет разлагаться на 32 года дольше, чем банка. Найти время разложения в природе фильтра от сигареты и время разложения консервной банки, если они сделаны из обычных материалов.

Решение. Пусть x лет — время разложения в природе фильтра от сигареты, а y лет — консервной банки. Тогда по условию задачи составим систему уравнений (поясните смысл каждого из уравнений):

$$\begin{cases} x - 10 = y; \\ \frac{x}{2} - 32 = \frac{y}{5}. \end{cases}$$

Заменив во втором уравнении системы y на выражение $x - 10$, получим уравнение относительно x:

$$\frac{x}{2} - 32 = \frac{x - 10}{5}.$$

Решив это уравнение, получим $x = 100$, значит, $y = 90$.

Ответ: 100 лет; 90 лет.

Пример 5. Катер за 2 ч прошел 25 км по течению реки и 12 км против течения. В другой раз тот же катер за 3 ч прошел 35 км по течению реки и 20 км против течения. Определить собственную скорость катера и скорость течения реки.

Решение. Пусть x $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ — собственная скорость катера, а y $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ — скорость течения реки. Тогда $(x + y)$ $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ — скорость движения катера по течению реки, а $(x - y)$ $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ — против течения. По условию задачи можно составить следующую систему уравнений (поясните почему):

$$\begin{cases} \frac{25}{x + y} + \frac{12}{x - y} = 2; \\ \frac{35}{x + y} + \frac{20}{x - y} = 3. \end{cases}$$

Поскольку $x^2 - y^2 \neq 0$ (это ограничение следует из условия задачи; поясните почему), то данная система уравнений равносильна следующей:

$$\begin{cases} 25(x - y) + 12(x + y) = 2(x^2 - y^2); \\ 35(x - y) + 20(x + y) = 3(x^2 - y^2). \end{cases}$$

Откуда имеем:

$$\begin{cases} 37x - 13y = 2(x^2 - y^2); & (3) \\ 55x - 15y = 3(x^2 - y^2), & (4) \end{cases}$$

значит, $x^2 - y^2 = 18x - 2y$ (поясните почему).

Подставив выражение $18x - 2y$ вместо выражения $x^2 - y^2$, например, в уравнение (3), находим $x = 9y$. Заменив в уравнении (4) x на $9y$, получим и решим уравнение относительно y:

$$y^2 - 2y = 0;$$
$$y = 0 \text{ или } y = 2.$$

Поскольку скорость течения реки отлична от нуля, то $y = 2$, и, соответственно, $x = 18$.

Ответ: 18 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 2 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

А Задачи, решение которых можно свести к решению систем уравнений с несколькими неизвестными, встречаются уже у древних авторов.

Задача Бхаскары (XII в.): «Некто сказал другу: “Дай мне 100 рупий, и я буду вдвое богаче тебя”. Друг ответил: “Дай мне только 10 рупий, и я стану в 6 раз богаче тебя”. Сколько рупий было у каждого?».

Решим эту задачу. Пусть некто имеет x рупий, а у его друга — y рупий. По условию задачи составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 100 = 2(y - 100), \\ y + 10 = 6(x - 10); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 40, \\ y = 170. \end{cases}$$

Ответ: 40 рупий; 170 рупий.

?

1. Составьте три различные задачи, каждая из которых решается при помощи системы уравнений $\begin{cases} x + 3y = 17, \\ 7x + 2y = 24. \end{cases}$
2. С чего начинается решение задачи с использованием системы уравнений?

Упражнения

3.70°. 1) Сумма двух целых чисел равна –15, а их произведение равно –184. Найдите эти числа.

2) Разность двух целых неотрицательных чисел равна 29, а их произведение равно 210. Найдите эти числа.

3.71°. 1) Сколько сообщений Лена написала Юре и сколько раз Юра ответил Лене, если известно, что сумма числа ее сообщений и числа его ответов равна 152, а их разность равна 68, причем Юра написал больше сообщений, чем Лена?

2) Найдите возраст собаки Найды и кота Пушка, если Найда старше Пушка, причем произведение их возрастов равно 72, а сумма равна 18.

3.72°. 1) По скольку окуней поймали Володя и Андрей, если известно, что разность между количеством Володиных и Андреевых окуней равна 3, а произведение этих чисел равно 54?
2) Сколько записок Ярослав написал Даше и сколько раз Даша написала ответы, если известно, что разность этих чисел равна 64, а их частное равно 17, причем Даша написала меньше записок, чем Ярослав?

3.73°. 1) В двузначном числе цифра десятков на 5 больше, чем цифры единиц. Произведение цифр числа меньше самого числа на 58. Найдите это число.
2) В двузначном числе цифра десятков на 3 меньше цифры единиц. Найдите число, если произведение его цифр меньше самого числа на 15.

3.74. 1) Нам вдвоем 63 года. Сейчас я на 3 года старше, чем был тогда, когда мне было столько, сколько тебе теперь. Сколько лет сейчас каждому из нас?
2) Мне сейчас на 6 лет больше, чем было тебе тогда, когда мне было столько, сколько тебе сейчас. Когда тебе будет столько, сколько мне сейчас, нам вместе будет 60 лет. Сколько лет каждому из нас сейчас?

3.75°. 1) Произведение возрастов Нины и Веры равно 420. Известно, что Вера на год старше Нины. Найдите сумму их возрастов.
2) Произведение возрастов тренера и спортсмена равно 480, при этом спортсмен младше тренера на 14 лет. Найдите сумму их возрастов.

3.76. 1) Сумма двух чисел равна 2,53. Если в большем из них перенести запятую на один знак влево, то получится меньшее число. Найдите эти числа.
2) Разность двух чисел равна 103,95. Если в вычитаемом перенести запятую на два знака вправо, то получится уменьшаемое. Найдите эти числа.

3.77. 1) Лодка с постоянной собственной скоростью плывет по течению реки от деревни Бахтино до деревни Караневичи 3 ч. Возвращение в Бахтино занимает 4 ч.

Сколько времени понадобится, чтобы проплыть этот же путь до деревни Караневичи по течению на плоту?

2) Лодка с постоянной собственной скоростью плывет от деревни Гагики до деревни Машки по течению реки Оль 2 ч, а возвращается за 3 ч. Сколько времени плыла бы лодка от Гагиков до Машков, если бы не было течения?

3.78. 1) В карьере работают самосвалы двух грузоподъемностей. Три самосвала одной грузоподъемности и два — другой за один раз перевозят 55 т груза, а пять самосвалов одного типа и семь — другого за один раз перевозят 110 т груза. Найдите грузоподъемности самосвалов.

2) Маршрут обслуживается двумя автобусами с различным числом посадочных мест. За 5 рейсов они могут перевезти, будучи заполненными, 535 человек. Если один автобус выполнит 12 рейсов, а другой — 8 рейсов, то они перевезут, будучи заполненными, 1104 человека. Найдите, сколько мест в каждом автобусе.

3.79. 1) При выгрузке угля из вагона были задействованы две машины. Одна из них могла перевезти весь уголь на 5 ч быстрее, чем другая. После 4 ч совместной работы другая машина весь оставшийся уголь вывезла за 8 ч. За сколько часов могла перевезти весь уголь каждая машина, работая отдельно?

2) Для наполнения водоема поставлено 2 насоса. После двух часов совместной работы первый насос был отключен и второй закончил наполнение оставшейся $\frac{1}{3}$ водоема. За сколько часов каждый из насосов, работая отдельно, может наполнить водоем, если первому насосу на выполнение этой работы требуется на 8 ч меньше, чем второму?

3.80. 1) Два поезда, выехав одновременно навстречу друг другу из пунктов Толино и Зылево, расстояние между которыми 900 км, встретятся через 5 ч. Если один из них увеличит скорость на 10 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а другой уменьшит скорость на 40 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то к моменту встречи один из них проедет на 180 км больше, чем другой. Найдите скорости поездов.

2) Катер, двигаясь по течению реки, преодолевает расстояние между пунктами Артемьево и Коптево за 3 ч. На обратный путь при движении против течения с той же собственной скоростью катер затрачивает на 2 ч больше. За какое время катер вернулся бы при отсутствии течения?

3.81. 1) Степиной бабушке Лидии Васильевне больше 40 лет, причем сумма цифр в записи ее возраста равна 10, а разность цифр равна 4. Сколько лет Степиной бабушке?

2) Степиной маме Ирине Станиславовне меньше 40 лет, причем сумма цифр в записи ее возраста равна 10, а разность цифр равна 6. Сколько лет Степиной маме?

3.82. 1) Имеются 15-процентный и 25-процентный растворы кислоты. Сколько граммов каждого раствора надо взять, чтобы получить 400 г 20-процентного раствора?

2) В одном сплаве содержится 40 % меди, а в другом — 60 %. Сколько килограммов каждого сплава надо взять, чтобы получить 70 кг нового сплава, в котором медь составляет 45 %?

3.83*. 1) Андрей собирался проехать 84 км на велосипеде с одной и той же скоростью. Но первую половину пути он проехал со скоростью на 4 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ меньше, чем планировал, а вторую половину — со скоростью на 4 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше запланированной. На весь путь Андрей затратил время, отличающееся от намеченного на 32 мин. С какой скоростью собирался ехать Андрей? Раньше или позже намеченного срока он приехал?

2) Мотоциклист Володя проезжает 80 км на 2 ч 24 мин быстрее велосипедиста Глеба. Если Глеб увеличит скорость на 50 %, то его скорость станет меньше скорости Володи на 20 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. На сколько медленнее Володи в этом случае Глеб проедет 80 км?

Глава 4
Арифметическая и геометрическая прогрессии

4.1. Числовая последовательность

Рассмотрим сначала два примера.

Пример 1. Каждому натуральному числу n поставим в соответствие число $3n$. Схематически это соответствие можно изобразить так:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \dots, & n, & \dots . \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 3\cdot 1, & 3\cdot 2, & 3\cdot 3, & \dots, & 3n, & \dots . \end{array}$$

Говорят, что указанным соответствием задана ***последовательность чисел***, или ***числовая последовательность***:

$$3, \quad 6, \quad 9, \quad \dots, \quad 3n, \quad \dots .$$

Коротко эту числовую последовательность обозначают $(3n)$.

Пример 2. Каждому натуральному числу n поставим в соответствие число $(-1)^n$. Схематически это соответствие можно изобразить так:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \dots, & n, & \dots . \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ (-1)^1, & (-1)^2, & (-1)^3, & (-1)^4, & \dots, & (-1)^n, & \dots . \end{array}$$

Говорят, что указанным соответствием задана числовая последовательность

$$-1, \quad 1, \quad -1, \quad 1, \quad \dots, \quad (-1)^n, \quad \dots .$$

Коротко она обозначается $((-1)^n)$.

Пусть по некоторому закону каждому натуральному числу n ставится в соответствие определенное действительное число a_n. Тогда говорят, что задана *числовая последовательность*

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

или, короче, — *числовая последовательность* (a_n).

Числа a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... называются *членами последовательности*, число a_1 — *первым членом*, число a_2 — *вторым членом* и т. д. Число a_n называется *n-м членом* последовательности (a_n).

В примере 1:

$a_1 = 3, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 9, \quad ..., \quad a_{19} = 3 \cdot 19 = 57, \quad ..., \quad a_n = 3n.$

В примере 2:

$a_1 = -1, \;\; a_2 = 1, \;\; a_3 = -1, \;\; ..., \;\; a_{19} = (-1)^{19} = -1, \;\; ..., \;\; a_n = (-1)^n.$

! Задать числовую последовательность — это значит задать закон, по которому для каждого натурального числа n определяется ее n-й член. В алгебре числовая последовательность задается **формулой *n*-го члена**.

Так, в примере 1 последовательность задается формулой $a_n = 3n$. В примере 2 последовательность задается формулой $a_n = (-1)^n$.

▲ Закон, по которому каждому натуральному числу ставится в соответствие определенное действительное число, есть не что иное, как числовая функция с областью определения N (множеством натуральных чисел). Следовательно,

! задать числовую последовательность — это значит задать функцию с областью определения N и множеством значений, содержащихся в R (множестве действительных чисел).

Последовательность может быть задана ***рекуррентной формулой***. Эта формула выражает каждый член последовательности, начиная с некоторого k-го, через один или несколько предыдущих; первые $k - 1$ членов последовательности просто указываются.

a Рекуррентный — от латинского слова *recurrens* (*recurrentis*) — возвращающийся. Последовательность, которую задают рекуррентной формулой, называют еще возвратной.

Пример 3. Последовательность (a_n) задана рекуррентной формулой $a_n = 2a_{n-1} - 3$, $a_1 = 7$. Найти a_5.

Решение.

$$a_2 = 2a_1 - 3 = 2 \cdot 7 - 3 = 11;$$
$$a_3 = 2a_2 - 3 = 2 \cdot 11 - 3 = 19;$$
$$a_4 = 2a_3 - 3 = 2 \cdot 19 - 3 = 35;$$
$$a_5 = 2a_4 - 3 = 2 \cdot 35 - 3 = 67.$$

Пример 4. Последовательность (a_n) задана рекуррентной формулой $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ и $a_1 = a_2 = 1$. Найти a_7.

Решение. $a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2;$
$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + 2 = 3;$
$a_5 = a_3 + a_4 = 2 + 3 = 5;$
$a_6 = a_4 + a_5 = 3 + 5 = 8;$
$a_7 = a_5 + a_6 = 5 + 8 = 13.$

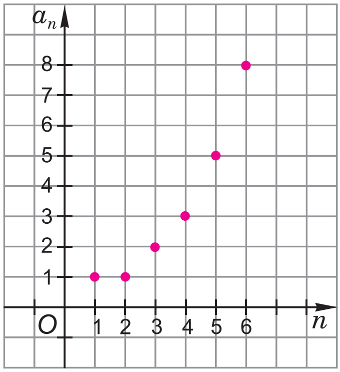


Рис. 137

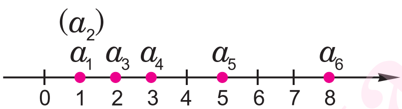


Рис. 138

Поскольку числовая последовательность является функцией, то можно изобразить ее график.

График последовательности (a_n) представляет собой бесконечное множество точек с координатами $(n; a_n)$, где $n \in N$.

На рисунке 137 изображены первые шесть точек графика последовательности (a_n) из примера 4.

Есть и другой способ графического изображения членов числовых последовательностей — на одной координатной прямой. Этот способ показан на рисунке 138 для последовательности из примера 4.

Последовательность, рассмотренную в примере 3, первым начал исследовать в 1202 г. итальянский математик Леонард Пизанский (Фибоначчи). В конце XV в. математик из Венеции Лука Пачоли продолжил изучение этой последовательности и установил связь ее членов (он назвал их числами Фибоначчи) с золотым сечением или божественной пропорцией. ▲

?

1. Приведите свои примеры числовых последовательностей.
2. В каком случае говорят, что задана числовая последовательность?
3. Как обозначается числовая последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots?$$

4. Как называются числа из числовой последовательности? Как называется каждое из чисел: a_1, a_2, a_n, a_k?
5. Как может быть задана числовая последовательность? Приведите пример.

Упражнения

4.1°. Дана последовательность квадратов натуральных чисел

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots, n^2, (n+1)^2, \ldots .$$

1) Назовите четвертый, седьмой, девятый, n-й, $(n+3)$-й члены данной последовательности.

2) Каким по счету (по номеру) членом данной последовательности является каждое из чисел:

$$9,\ 64,\ k^2,\ (n-1)^2,\ (n+2)^2?$$

3) Какой член данной последовательности следует за каждым из указанных ее членов:

$$49,\ 100,\ k^2,\ (n+1)^2,\ (n+3)^2?$$

4) Является ли членом данной последовательности каждое из чисел:

$$-25,\ 39,\ 125,\ 169,\ 625,\ 1000,\ 10\,000?$$

4.2. Дана последовательность кубов натуральных чисел

$$1, 8, 27, 64, \ldots, n^3, \ldots .$$

1) Назовите пятый, восьмой, десятый, n-й, $(n+2)$-й члены данной последовательности.

2) Каким по счету (по номеру) членом данной последовательности является каждое из чисел:

$$125,\ 729,\ k^3,\ (n-2)^3,\ (n+1)^3?$$

3) Какой член данной последовательности следует за каждым из указанных ее членов:

$$343,\ 1000,\ k^3,\ (n+2)^3,\ (n-2)^3?$$

4) Является ли членом данной последовательности каждое из чисел:

$$-64,\ -27,\ 169,\ 216,\ 125\,000,\ 1\,000\,000?$$

4.3. Вычислите первые четыре члена последовательности (a_n), если:

1) $a_n = 3n + 2$;
2) $a_n = 4n - 1$;
3) $a_n = 5n - 7$;
4) $a_n = 6 + 2n$;
5) $a_n = n(n + 2)$;
6) $a_n = n(n - 1)$;
7) $a_n = 4^{n-1}$;
8) $a_n = 3^{n+1}$.

4.4. Вычислите первые три члена последовательности (a_n), если:

1) $a_n = n^2 - 2n^3$;
2) $a_n = 3n^2 + n^3$;
3) $a_n = 1 + \frac{2}{n}$;
4) $a_n = 2 - \frac{1}{n}$;

5) $a_n = (-1)^n$; 6) $a_n = (-2)^{n+1}$;

7) $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$; 8) $a_n = 2 - \frac{2}{n^2}$.

4.5. Вычислите 10-й и 15-й члены последовательности (a_n), если:

1) $a_n = 6n + 10$; 2) $a_n = 8 - 2n$;

3) $a_n = |n - 1| + 4$; 4) $a_n = |2n + 1| - 8$;

5) $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}$; 6) $a_n = \frac{6n+2}{4n-1}$;

7) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$; 8) $a_n = \frac{2-(-1)^{n+1}}{(-1)^n}$.

4.6. Последовательность (a_n) задана формулой n-го члена. Вычислите a_3, a_5, a_6, если:

1) $a_n = 8 + 3(n - 1)$; 2) $a_n = 10 - 2(3 - n)$;

3) $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$; 4) $a_n = 0{,}5 \cdot 2^{n+1}$;

5) $a_n = \left|-\frac{n-1}{n+1}\right|$; 6) $a_n = |n(1 - n)|$;

7) $a_n = \frac{2^n+1}{2^n-1}$; 8) $a_n = \frac{1-3^n}{1+3^n}$.

4.7. Вычислите второй, третий, четвертый и пятый члены последовательности (a_n), если первый член равен:

1) 8, а каждый следующий на 4 больше предыдущего;
2) 3, а каждый следующий в 6 раз больше предыдущего;
3) 18, а каждый следующий на 9 меньше предыдущего;
4) 120, а каждый следующий в 4 раза меньше предыдущего.

4.8. Найдите пять первых членов последовательности (a_n) натуральных чисел, кратных:

1) 3; 2) 5; 3) 9; 4) 10.

Запишите формулу n-го члена.

4.9. Запишите пять первых членов последовательности (a_n) натуральных чисел, которые при делении:

1) на 3 дают в остатке 2;
2) на 5 дают в остатке 3;
3) на 6 дают в остатке 1;
4) на 10 дают в остатке 5.

Запишите формулу n-го члена.

4.10. Найдите 4-й, 6-й и 7-й члены последовательности (a_n), зная, что:

1) $a_n = \begin{cases} 2, \text{ если } n \text{ — нечетное число,} \\ \dfrac{n+2}{n}, \text{ если } n \text{ — четное число;} \end{cases}$

2) $a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n}, \text{ если } n \text{ — четное число,} \\ \dfrac{2}{n+1}, \text{ если } n \text{ — нечетное число.} \end{cases}$

4.11*. Последовательность (a_n) задана рекуррентной формулой $a_{n+1} = (4n+2)a_n$ и $a_1 = 3$. Найдите a_5.

4.12*. Последовательность (a_n) задана рекуррентной формулой $a_{n+1} = 2a_n + 3n$ и $a_1 = 2$. Найдите a_8.

4.13*. Найдите a_5, если последовательность (a_n) задана рекуррентной формулой:

1) $a_{n+2} = \dfrac{2a_n + 4a_{n+1}}{5}$ и $a_1 = -1$, $a_2 = 3$;

2) $a_{n+2} = \dfrac{3a_n - 2a_{n+1}}{2}$ и $a_1 = 1$, $a_2 = -4$;

3) $a_{n+2} = a_n^2 + 2a_{n+1}^2$ и $a_1 = 2$, $a_2 = 3$;

4) $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}^2$ и $a_1 = 5$, $a_2 = -1$.

4.2. Арифметическая прогрессия

Определение. ***Арифметической прогрессией*** **называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным для этой последовательности числом. Это число называется *разностью арифметической прогрессии*.**

Таким образом, арифметическая прогрессия с разностью d* — это такая числовая последовательность (a_n), что для любого натурального n верно равенство $a_{n+1} = a_n + d$.

Арифметическая — от греческого слова *aritmos* — число; прогрессия — от латинского слова *progressio* — движение вперед, возрастание.

* Тот факт, что d — постоянное число, можно записать так: «d — const» (от лат. *constans* — постоянный, неизменный).

Пример 1. Натуральный ряд

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

является арифметической прогрессией с первым членом 1 и разностью 1, т. е. $a_1 = 1$, $d = 1$.

Пример 2. Последовательность нечетных натуральных чисел

$$1, 3, 5, \ldots, 2n - 1, \ldots$$

является арифметической прогрессией с первым членом 1 и разностью 2, т. е. $a_1 = 1$, $d = 2$.

Пример 3. Последовательность, каждый член которой равен 5

$$5, 5, 5, \ldots, 5, \ldots,$$

является арифметической прогрессией с первым членом 5 и разностью 0, т. е. $a_1 = 5$, $d = 0$.

Пример 4. Последовательность четных неположительных чисел

$$0, -2, -4, -6, \ldots, -2n + 2, \ldots$$

является арифметической прогрессией с первым членом 0 и разностью −2, т. е. $a_1 = 0$, $d = -2$.

Теорема. Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью d. Тогда формула ее n-го члена имеет вид

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Доказательство. По определению арифметической прогрессии с разностью d имеем:

$$\begin{aligned} &a_2 = a_1 + d; \\ &a_3 = a_2 + d; \\ &a_4 = a_3 + d; \\ &\ldots \\ &a_{n-1} = a_{n-2} + d; \\ &a_n = a_{n-1} + d. \end{aligned}$$

Число этих равенств $n - 1$. Сложив их левые части и сложив их правые части, получим верное числовое равенство

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + (n - 1)d.$$

Отсюда после приведения подобных членов имеем

$$a_n = a_1 + (n - 1)d. \boxtimes$$

В рассмотренных примерах 1—4 формулы n-го члена соответственно имеют вид:

1) $a_n = n$; 2) $a_n = 2n - 1$;
3) $a_n = 5$; 4) $a_n = -2n + 2$.

Пример 5. Найти разность d арифметической прогрессии (a_n), если $a_6 = 12$, $a_{10} = 100$.

Решение. По формуле n-го члена

$$a_6 = a_1 + 5d \text{ и } a_{10} = a_1 + 9d.$$

Откуда согласно условию имеем:

$$\begin{cases} a_1 + 5d = 12, \\ a_1 + 9d = 100. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим:

$$4d = 88, \text{ т. е. } d = 22.$$

Ответ: $d = 22$.

Пример 6. а) Доказать, что числовая последовательность (a_n), заданная формулой $a_n = 2n - 7$, является арифметической прогрессией.

б) Изобразить график последовательности (a_n).

Доказательство. а) Запишем n-й и $(n + 1)$-й члены последовательности:

$$a_n = 2n - 7,$$
$$a_{n+1} = 2n + 2 - 7 = 2n - 5.$$

Найдем разность $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = 2n - 5 - (2n - 7) = $$
$$= 2n - 5 - 2n + 7 = 2.$$

Таким образом, $a_{n+1} = a_n + 2$, и на основании определения арифметической прогрессии последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. ☒

б) График последовательности (a_n) изображен на рисунке 139. Обратите внимание, что ордината каждой следующей точки **больше** ординаты предыдущей точки **на 2 единицы.**

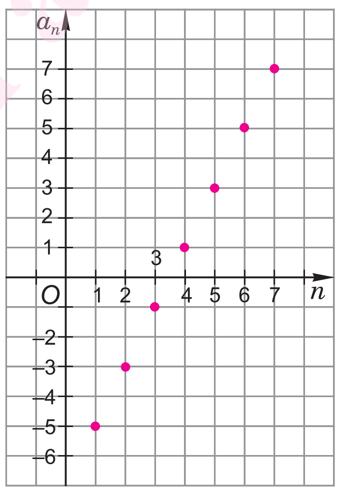


Рис. 139

На рисунке 140 первые семь членов последовательности отмечены точками координатной прямой. Обратите внимание, что координата каждой следующей точки **больше** координаты предыдущей точки **на 2 единицы**.

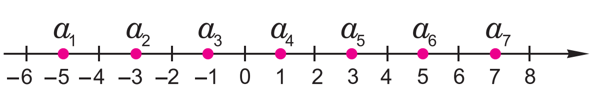


Рис. 140

▲**Пример 7.** Доказать, что в арифметической прогрессии (a_n) любые два члена a_k и a_m, где $k < m$, связаны формулой

$$a_m = a_k + d(m - k).$$

Доказательство. По формуле n-го члена арифметической прогрессии имеем:

$$a_k = a_1 + d(k - 1),$$
$$a_m = a_1 + d(m - 1).$$

Значит,

$$a_m - a_k = d(m - 1) - d(k - 1),$$

откуда получим

$$a_m = a_k + d(m - k). \boxtimes$$

Используя эту формулу при решении примера 5, можно было сразу записать: $a_{10} = a_6 + d(10 - 6)$, т. е. $100 = 12 + d \cdot 4$, откуда $d = 22$. ▲

Задачи, связанные с арифметической прогрессией, встречаются уже в египетских папирусах (около XX в. до н. э.).

1. Сформулируйте определение арифметической прогрессии. Приведите свои примеры арифметических прогрессий.
2. Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии.

Упражнения

4.14. Является ли арифметической прогрессией числовая последовательность:

1) 1, 4, 7, 10, ...;
2) 2, –3, 4, –5, ...;
3) 9, 6, 3, 0, ...;
4) –3, 2, 0, 5, 3, ...;
5) 2, 1, 5, 1, 0, ...;
6) 1, –1, 2, –2, 3, –3, ...;
7) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...$;
8) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...$?

4.15°. Запишите первые четыре члена арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_1 = 3,\ d = 1$;
2) $a_1 = -2,\ d = 2$;
3) $a_1 = 0,\ d = -3$;
4) $a_1 = 6,\ d = -4$;
5) $a_1 = 34,\ d = \frac{1}{2}$;
6) $a_1 = 9,\ d = \frac{1}{3}$.

4.16°. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_3 = 8,\ a_4 = 6$;
2) $a_5 = 9,\ a_6 = 12$;
3) $a_8 = 3\frac{1}{2},\ a_7 = 4\frac{2}{3}$;
4) $a_{13} = 15\frac{1}{8},\ a_{12} = 8\frac{3}{4}$.

4.17. Найдите шестой член и разность арифметической прогрессии:

1) 3, 7, 11, 15, ...;
2) 7, 9, 11, 13, ...;
3) –4, –2, 0, 2, ...;
4) –16, –12, –8, –4, ...;
5) $2,\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{2}{3},\ 3,\ \ldots$;
6) $5\frac{1}{2},\ 5,\ 4\frac{1}{2},\ 4,\ \ldots$;
7) $2,\ 2+\sqrt{3},\ 2+2\sqrt{3},\ \ldots$;
8) $\sqrt{3},\ \sqrt{3}-2,\ \sqrt{3}-4,\ \ldots$;
9) 5, 5, 5, 5, ...;
10) –6, –6, –6, –6, ...

4.18°. В арифметической прогрессии (a_n) с разностью d найдите:

1) a_{10}, если $a_1 = 4,\ d = 3$;
2) a_{20}, если $a_1 = 3,\ d = 5$;
3) a_{16}, если $a_1 = -1,\ d = -6$;
4) a_7, если $a_1 = -4,\ d = -3$;
5) a_4, если $a_1 = 8,\ d = \frac{1}{2}$;
6) a_{13}, если $a_1 = -5\frac{1}{3},\ d = -\frac{1}{3}$.

4.19°. Найдите разность арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_1 = 8,\ a_{10} = 44$;
2) $a_1 = 3,\ a_{20} = 117$;
3) $a_1 = -2,\ a_{10} = 148$;
4) $a_1 = -8,\ a_{14} = 18$;
5) $a_3 = 25,\ a_8 = 35$;
6) $a_3 = 12,\ a_7 = -4$;
7) $a_5 = 12,\ a_8 = 27$;
8) $a_4 = 15,\ a_7 = 10$.

4.20. Определите первый член арифметической прогрессии (a_n) с разностью d, если:

1) $a_6 = -10,\ d = -3$;
2) $a_7 = 20,\ d = 3$;
3) $a_{12} = 17,\ d = 2$;
4) $a_{10} = -55,\ d = -7$;
5) $a_{18} = -11,\ d = -1$;
6) $a_{15} = -10,\ d = 2$;
7) $a_{13} = 1,\ d = -\frac{1}{4}$;
8) $a_{45} = 459,\ d = 10$.

4.21°. Запишите первые пять членов числовой последовательности (a_n) и определите, является ли (a_n) арифметической прогрессией, если:

1) $a_n = 12 - 6n$;
2) $a_n = 10n - 5$;
3) $a_n = 6(n + 1)$;
4) $a_n = -2(n - 4)$.

4.22. Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии (a_n), если первые ее четыре члена следующие:

1) 6, 10, 14, 18;
2) 3, 5, 7, 9;
3) 1, –4, –9, –14;
4) –3, –8, –13, –18;
5) $5,\ 5\frac{1}{4},\ 5\frac{1}{2},\ 5\frac{3}{4}$;
6) $4,\ 3\frac{2}{3},\ 3\frac{1}{3},\ 3$;
7) $6a^2,\ 9a^2,\ 12a^2,\ 15a^2$;
8) $a^3+1,\ a^3+2,\ a^3+3,\ a^3+4$.

4.23. Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_5 = 13,\ a_8 = 22$;
2) $a_8 = 13,\ a_{11} = 1$;
3) $a_7 = -7,\ a_{12} = 18$;
4) $a_5 = -32,\ a_7 = -44$.

4.24. 1) Число –16 является членом арифметической прогрессии 29, 24, 19, 14, ... Найдите номер этого члена.
2) Число –36 является членом арифметической прогрессии 18, 12, 6, 0, ... Найдите номер этого члена.

4.25. 1) Является ли число 34 членом арифметической прогрессии –10, –7, –4, ...? Если да, то укажите его номер.
2) Является ли число 120 членом арифметической прогрессии –3, 2, 7, ...? Если да, то укажите его номер.

4.26. Найдите номер n члена арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_n = 120,\ a_2 = 22,\ a_4 = 50$;
2) $a_n = -100,\ a_5 = 40,\ a_8 = -2$.

4.27. Докажите, что последовательность (a_n) является арифметической прогрессией. Найдите a_1, d, a_{40}, если:

1) $a_n = 8 - 5n$;
2) $a_n = 3 - 4n$.

4.28. Запишите первые пять членов арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_1 = 8,\ a_3 = 16$;
2) $a_1 = 10,\ a_3 = 2$;
3) $a_{13} = 12,\ a_5 = 6$;
4) $a_5 = 14,\ a_7 = 34$.

4.29. Найдите a_1, a_6 и разность d арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_5 = 30,\ a_7 = 36$;
2) $a_5 = 12,\ a_7 = 26$;
3) $a_5 = -8,\ a_7 = -4$;
4) $a_5 = -2,\ a_7 = -14$.

4.30. Найдите a_{29} и a_1 арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_{28} = 28,\ a_{30} = 38$;
2) $a_{28} = -6,\ a_{30} = 6$.

4.31. Между числами k и p вставьте n чисел так, чтобы полученные $n+2$ числа были последовательными членами арифметической прогрессии, если:

1) $k=-7,\ p=3,\ n=2$; 2) $k=-7,\ p=3,\ n=3$;
3) $k=5,\ p=26,\ n=6$; 4) $k=1,\ p=25,\ n=5$.

4.32. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, в которой:

1) $a_2+a_5-a_3=10$ и $a_1+a_6=17$;
2) $a_4+a_6-a_7=11$ и $a_2+a_5=25$;
3) $a_8-a_5=12$ и $a_6:a_2=2$;
4) $a_7-a_3=8$ и $a_4\cdot a_6=525$.

4.33*. Докажите, что:

1) каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, является средним арифметическим предыдущего и последующего членов этой прогрессии, т. е.

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2};$$

2) если числовая последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, то каждый ее член (начиная с $(k+1)$-го) равен среднему арифметическому двух членов, отстоящих от этого члена на k мест, т. е.

$$a_n=\frac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2};$$

3) если числовая последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия и сумма номеров двух ее членов равна $n+1$, то сумма этих членов равна

$$a_1+a_n;$$

4) если каждый член числовой последовательности, начиная со второго, является средним арифметическим предыдущего и последующего членов, то эта последовательность — арифметическая прогрессия.

4.3. Сумма n первых членов арифметической прогрессии

Теорема 1. Пусть $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n$ — первые n членов арифметической прогрессии и p — натуральное число, $1\leqslant p\leqslant n-1$. Тогда верно равенство

$$a_{1+p}+a_{n-p}=a_1+a_n. \qquad (1)$$

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства (1), используя формулу n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_{1+p} + a_{n-p} = a_1 + (1 + p - 1)d + a_1 + (n - p - 1)d = 2a_1 + (n - 1)d.$$

Преобразуем правую часть равенства (1), используя формулу n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n - 1)d = 2a_1 + (n - 1)d. \boxtimes$$

О любых первых n членах арифметической прогрессии говорят, что они образуют ***конечную арифметическую прогрессию***. Первый и n-й члены этой прогрессии называются ее концами (крайними членами). При этом равенство (1) читается так:

в конечной арифметической прогрессии сумма членов, равноотстоящих от ее концов, равна сумме крайних членов.

Пример 1. В конечной арифметической прогрессии (a_n) семнадцать членов, причем $a_1 + a_{17} = 35$ и $a_6 = 7$. Найти a_{12}.

Решение. По формуле n-го члена получим:

$$a_6 = a_1 + 5d, \text{ т. е. } 7 = a_1 + 5d,$$
$$a_1 + a_{17} = a_1 + a_1 + 16d = 2a_1 + 16d, \text{ т. е. } 35 = 2a_1 + 16d.$$

Составим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} 7 = a_1 + 5d, \\ 35 = 2a_1 + 16d; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 7 - 5d, \\ 35 = 2(7 - 5d) + 16d, \end{cases} \quad \text{откуда имеем} \quad \begin{cases} a_1 = -10,5, \\ d = 3,5. \end{cases}$$

По формуле n-го члена

$$a_{12} = a_1 + 11d = -10,5 + 11 \cdot 3,5 = -10,5 + 38,5 = 28.$$

Ответ: $a_{12} = 28$.

Этот пример можно решить иначе. Заметив, что $a_6 = a_{1+5}$, $a_{12} = a_{17-5}$ на основании равенства (1), получим

$$a_{1+5} + a_{17-5} = a_1 + a_{17},$$

т. е. $a_6 + a_{12} = a_1 + a_{17}$ и по условию имеем $7 + a_{12} = 35$, откуда следует, что $a_{12} = 28$.

Сумму первых n членов арифметической прогрессии (a_n) будем обозначать S_n, т. е.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Теорема 2. Для арифметической прогрессии (a_n) имеют место формулы:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \tag{2}$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n. \tag{3}$$

Доказательство. Докажем формулу (2). Запишем сумму S_n дважды (в порядке возрастания и в порядке убывания номеров членов прогрессии):

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Сложив левые части этих равенств и сложив их правые части, получим

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots +$$
$$+ (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

По теореме 1 каждая сумма, стоящая в скобках, равна $a_1 + a_n$, а таких сумм n, поэтому $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$, откуда

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \boxtimes$$

▲ Докажите формулу (3) самостоятельно, используя формулу (2) и формулу $a_n = a_1 + (n-1)d$. ▲

Занимательную историю рассказывают о великом немецком математике К. Ф. Гауссе (1777—1855). Когда он учился в начальной школе, учитель, желая надолго занять блестящего, но шаловливого ученика, предложил ему сложить все числа от 1 до 100. Однако менее чем через минуту задача была решена. Юный Гаусс заметил, что

$$1 + 2 + \ldots + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + \ldots =$$
$$= 101 \cdot 50 = 5050.$$

Пример 2. Найти S_{10} для арифметической прогрессии (a_n), если $a_4 + a_8 = 24$ и $a_5 + a_{10} = 348$.

Решение. Используя формулу n-го члена арифметической прогрессии, находим:

$$a_4 + a_8 = a_1 + 3d + a_1 + 7d = 2a_1 + 10d;$$
$$a_5 + a_{10} = a_1 + 4d + a_1 + 9d = 2a_1 + 13d.$$

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2a_1 + 10d = 24, \\ 2a_1 + 13d = 348. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $d = 108$, $a_1 = -528$.
По формуле (3) найдем

$$S_{13} = \frac{2a_1 + 12d}{2} \cdot 13 = (a_1 + 6d)13 = (-528 + 6 \cdot 108)13 =$$
$$= 120 \cdot 13 = 1560.$$

Ответ: $S_{13} = 1560$.

Пример 3. Добрый волшебник раздал первым пяти встречным 100 золотых монет. Каждому встречному он давал на одно и то же число монет больше, чем предыдущему. Сколько монет получил каждый из пяти встречных, если последние три получили в три раза больше, чем первые два?

Решение. По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} S_5 = 100, \\ 3S_2 = S_5 - S_2, \end{cases}$$

Решив ее, получим:

$$\begin{cases} S_5 = 100, \\ S_2 = 25, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} \dfrac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 100, \\ 2a_1 + d = 25, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} a_1 + 2d = 20, \\ 2a_1 + d = 25. \end{cases}$$

Из последней системы находим: $a_1 = 10$, $d = 5$. Таким образом, 100 монет пяти встречным были розданы в количестве: 10, 15, 20, 25, 30.

Ответ: 10; 15; 20; 25; 30.

Древнегреческие математики установили связь арифметической прогрессии, состоящей из нечетных чисел, с некоторыми красивыми числовыми соотношениями. Так, например, они заметили, что: $1 = 1^2$; $1 + 3 = 2^2$; $1 + 3 + 5 = 3^2$; $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ и т. д.

Привлекла внимание древних греков и такая закономерность:

$$1 = 1^3; \quad 3 + 5 = 2^3; \quad 7 + 9 + 11 = 3^3;$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 4^3 \text{ и т. д.}$$

1. Приведите пример конечной арифметической прогрессии.
2. Сформулируйте свойство членов конечной арифметической прогрессии, равноотстоящих от ее концов.
3. Как обозначают сумму n первых членов арифметической прогрессии?
4. По каким формулам можно вычислить сумму n первых членов арифметической прогрессии?

Упражнения

4.34°. Найдите сумму n первых членов арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_1 = 2,\ a_n = 40,\ n = 50;$
2) $a_1 = -1,\ a_n = 100,\ n = 40;$
3) $a_1 = -2,\ a_n = -80,\ n = 100;$
4) $a_1 = 2,\ a_n = 200,\ n = 50;$
5) $a_1 = 1 + \sqrt{2},\ a_n = 1 - 13\sqrt{2},\ n = 10;$
6) $a_1 = 1 - \sqrt{3},\ a_n = 1 + 25\sqrt{3},\ n = 5.$

4.35°. Найдите сумму:

1) всех четных чисел от 2 до 400 включительно;
2) всех нечетных чисел от 5 до 169 включительно;
3) всех двузначных чисел от 17 до 99 включительно;
4) всех трехзначных чисел от 840 до 999 включительно.

4.36°. Найдите сумму n первых членов арифметической прогрессии:

1) 13, 15, 17, ..., если $n = 17$;
2) 29, 26, 23, ..., если $n = 10$;
3) –8, –4, 0, ..., если $n = 20$;
4) –12, –17, –22, ..., если $n = 8$;
5) $\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ ...,$ если $n = 18$;
6) $\frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ ...,$ если $n = 30$.

4.37. Найдите число членов конечной арифметической прогрессии (a_n) и их сумму, если:

1) $a_1 = 1,\ a_n = 61,\ d = 5;$ 2) $a_1 = 15,\ a_n = -15,\ d = -6.$

4.38. 1) Об арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_1 + a_9 = 46$ и $a_4 = 18$. Найдите a_7 и сумму ее первых 8 членов.
2) Об арифметической прогрессии (a_n) известно, что $a_1 + a_{29} = 1{,}2$ и $a_{10} = 12$. Найдите a_{18} и сумму ее первых 20 членов.

4.39. В арифметической прогрессии (a_n) имеем $a_1 + a_{49} \neq 0$. Решите уравнение:

1) $2(a_4 + a_{46})x = a_2 + a_8 + a_{13} + a_{37} + a_{42} + a_{48}$;
2) $5(a_{21} + a_{29})x = a_{11} + a_{23} - a_{24} - a_{26} + a_{27} + a_{39}$;
3) $(a_4 + a_{46})x^2 - (a_{11} + a_{39})x = a_8 + a_{20} + a_{30} + a_{42}$;
4) $(a_8 + a_{42})x^2 + (a_{13} + a_{37})x = -a_3 - a_{15} - a_{35} - a_{47}$.

4.40. 1) Найдите сумму первых 20 членов арифметической прогрессии b, $4b$, $7b$, ...
2) Найдите сумму первых 36 членов арифметической прогрессии b^2, $6b^2$, $11b^2$, ...

4.41. Найдите a_1 и d для арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $S_5 = 65$ и $S_{10} = 320$; 2) $S_4 = 32$ и $S_6 = 60$;
3) $a_7 = 21$ и $S_7 = 105$; 4) $a_4 = 88$ и $S_{14} = 105$.

4.42. Найдите a_n и d для арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_1 = 10$, $n = 14$, $S_n = 1050$;
2) $a_1 = 40$, $n = 20$, $S_n = 40$.

4.43. Найдите сумму:

1) всех натуральных чисел, не превосходящих 120;
2) всех натуральных чисел, кратных 3 и не превосходящих 280;
3) всех натуральных чисел, кратных 8 и не превосходящих 240;
4) всех натуральных чисел, кратных 12 и не превосходящих 960.

4.44. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой n-го члена. Найдите S_{70}, если:

1) $a_n = 2n + 5$; 2) $a_n = 8 + 3n$;
3) $a_n = 138 - 3n$; 4) $a_n = 244 - 2n$.

4.45. 1) Найдите S_{11} для арифметической прогрессии (a_n), если:
а) $a_3 + a_9 = 12$; б) $a_4 + a_8 = 37$.

2) Найдите S_{20} для арифметической прогрессии (a_n), если:
а) $a_2 + a_{19} = 24$; б) $a_3 + a_{18} = 52$.

4.46. Найдите a_1 и d для арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $5a_1 + 10a_5 = 0$ и $S_4 = 14$;
2) $3a_4 - 2a_6 = 8$ и $S_8 = 208$.

4.47*. Решите уравнение:

1) $1 + 4 + 7 + \ldots + x = 117$;
2) $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$;
3) $3 + 7 + 11 + \ldots + x = 300$;
4) $2 + 6 + 10 + \ldots + x = 450$;
5) $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \ldots + (x + 28) = 155$;
6) $(3 + x) + (9 + x) + (15 + x) + \ldots + (93 + x) = 832$.

4.48. Найдите сумму S_n указанных первых n членов арифметической прогрессии:

1) 4, 8, 12, ..., 312;
2) 3, 6, 9, ..., 288;
3) 90, 80, 70, ..., –40;
4) 72, 70, 68, ..., –6;
5) –34, –29, –24, ..., 31;
6) –20, –17, –14, ..., 19;
7) $\frac{7}{3}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{15}{3}$, ..., $\frac{51}{3}$;
8) $\frac{1}{3}$, 0, $-\frac{1}{3}$, ..., $-\frac{22}{3}$.

4.49*. Является ли арифметической прогрессией последовательность, сумма первых n членов которой может быть найдена по формуле:

1) $S_n = 4n^2 + 2n$;
2) $S_n = n^2 - n$;
3) $S_n = 8n^2$;
4) $S_n = -6n^2$;
5) $S_n = (6n + 1)n$;
6) $S_n = n(2 - n)$?

4.50. 1) Сколько ударов сделают часы в течение суток, если они отбивают только число целых часов от 1 до 12?
2) Амфитеатр состоит из 10 рядов, причем в каждом следующем ряду на 10 мест больше, чем в предыдущем, а в последнем ряду 280 мест. Сколько мест в амфитеатре?

4.51. 1) Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовать конечную арифметическую прогрессию?
2) Могут ли длины сторон и периметр треугольника образовать конечную арифметическую прогрессию?

4.52. 1) Градусные меры внутренних углов многоугольника образуют конечную арифметическую прогрессию с первым членом 120° и разностью 5°. Найдите число сторон многоугольника.
2) Длины сторон выпуклого многоугольника образуют конечную арифметическую прогрессию, разность которой равна 3 см. Сколько сторон имеет многоугольник, если его наибольшая сторона равна 44 см, а периметр равен 158 см?

4.4. Геометрическая прогрессия

Определение. ***Геометрической прогрессией*** **называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное для этой последовательности число. Это число называется *знаменателем геометрической прогрессии*.**

Таким образом, геометрическая прогрессия со знаменателем q* — это такая последовательность отличных от нуля чисел (b_n), что для любого натурального n верно равенство

$$b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

Пример 1. Последовательность

$$3,\ 6,\ 12,\ \ldots,\ 3 \cdot 2^{n-1},\ \ldots$$

является геометрической прогрессией с первым членом $b_1 = 3$ и знаменателем $q = 2$.

Пример 2. Последовательность

$$5,\ \frac{5}{6},\ \frac{5}{6^2},\ \ldots,\ \frac{5}{6^{n-1}},\ \ldots$$

является геометрической прогрессией с первым членом $b_1 = 5$ и знаменателем $q = \frac{1}{6}$.

Пример 3. Последовательность, каждый член которой равен 5:

$$5,\ 5,\ 5,\ \ldots,\ 5,\ \ldots,$$

является геометрической прогрессией с первым членом $b_1 = 5$ и знаменателем $q = 1$.

Теорема. Пусть (b_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q. Тогда формула ее n-го члена имеет вид

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Доказательство. По определению геометрической прогрессии со знаменателем q имеем:

$$\begin{aligned}
&b_2 = b_1 \cdot q,\\
&b_3 = b_2 \cdot q,\\
&\ldots\\
&b_{n-1} = b_{n-2} \cdot q,\\
&b_n = b_{n-1} \cdot q.
\end{aligned}$$

* Тот факт, что q — постоянное число, можно записать так: «q — const».

Число этих равенств $n - 1$. Перемножив их левые части и перемножив их правые части, получим верное числовое равенство

$$b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot b_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-2} \cdot b_{n-1} \cdot q^{n-1}.$$

Разделив обе части этого равенства на число $b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}$ (оно не равно нулю, объясните почему), получим

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}. \boxtimes$$

Архимед (ок. 287—212 гг. до н. э.) геометрическую прогрессию вида 1, b, b^2, b^3, ... называл непрерывной пропорцией. При изучении ее Архимед показал, что произведение степеней связано с суммой показателей степеней.

В учебнике и задачнике по арифметике, написанных в VII в. армянским ученым А. Ширакаци, применяются арифметическая и геометрическая прогрессии.

Немецкий математик М. Штифель (1487—1567) установил соответствия между действиями в арифметической и геометрической прогрессиях.

Пример 4. Дана геометрическая прогрессия 7, 21, 63, ... Какой номер имеет член этой прогрессии — число 1701?

Решение. По условию имеем $b_1 = 7$, $b_2 = 21$, таким образом,

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{21}{7} = 3.$$

По формуле n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ получим $1701 = 7 \cdot 3^{n-1}$, откуда $3^{n-1} = \frac{1701}{7} = 243$, т. е. $3^{n-1} = 3^5$, значит, $n - 1 = 5$, $n = 6$.

Ответ: $n = 6$.

Пример 5. Числовая последовательность задана формулой n-го члена $b_n = 0{,}2 \cdot 13^{n+2}$. Доказать, что эта последовательность является геометрической прогрессией.

Доказательство. Используя формулу $b_n = 0{,}2 \cdot 13^{n+2}$, найдем b_{n+1}:

$$b_{n+1} = 0{,}2 \cdot 13^{(n+1)+2} = 0{,}2 \cdot 13^{n+3}.$$

Найдем отношение b_{n+1} к b_n:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{0{,}2 \cdot 13^{n+3}}{0{,}2 \cdot 13^{n+2}} = 13, \text{ отсюда следует, } b_{n+1} = b_n \cdot 13.$$

По определению последовательность отличных от нуля чисел (b_n) является геометрической прогрессией со знаменателем 13. ☒

Пример 6. Изобразить график геометрической прогрессии, у которой $b_1 = 0{,}2$, $q = 3$.

Решение. По формуле n-го члена геометрической прогрессии имеем $b_n = 0{,}2 \cdot 3^{n-1}$.

На рисунке 141 изображены первые четыре точки графика геометрической прогрессии (b_n).

Обратите внимание, что ордината каждой следующей точки графика **в 3 раза больше** ординаты предыдущей точки.

На рисунке 142 первые четыре члена геометрической прогрессии (b_n) отмечены точками координатной прямой.

Обратите внимание, что координата каждой следующей точки **в 3 раза больше** координаты предыдущей точки.

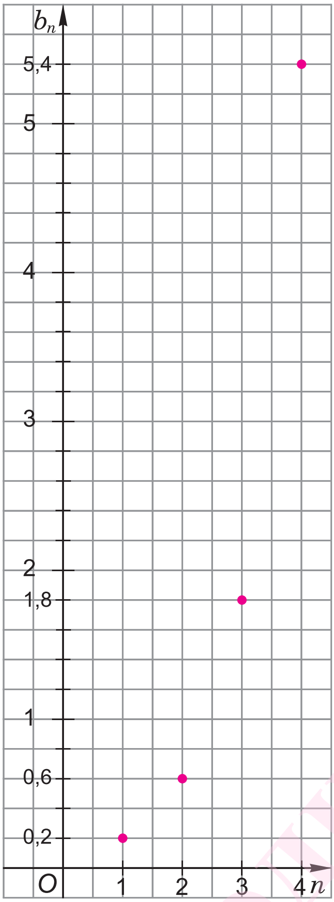


Рис. 141

Рис. 142

▲**Пример 7.** Доказать, что в геометрической прогрессии (b_n) любые два члена b_k и b_m, где $k < m$, связаны формулой $b_m = b_k \cdot q^{m-k}$.

Доказательство. По формуле n-го члена геометрической прогрессии имеем:

$$b_k = b_1 \cdot q^{k-1}, \qquad b_m = b_1 \cdot q^{m-1}.$$

Значит, $\frac{b_m}{b_k} = \frac{q^{m-1}}{q^{k-1}}$, откуда получим $b_m = b_k \cdot q^{m-k}$. ☒▲

В древнегреческом папирусе (XX в. до н. э.) обнаружена такая геометрическая прогрессия: 7, 49, 343, 2401, 16 807. Причем под этими числами соответственно подписаны слова: «лица», «кошки», «мыши», «ячмень», «мера». Эта запись истолковывается так: у 7 лиц есть по 7 кошек, каждая кошка съедает по 7 мышей, каждая мышь съедает по 7 колосьев ячменя, из каждого колоса может вырасти по 7 мер зерна.

1. Сформулируйте определение геометрической прогрессии. Приведите свои примеры геометрических прогрессий.
2. Укажите формулу n-го члена геометрической прогрессии.

Упражнения

4.53°. Найдите пятый и шестой члены геометрической прогрессии (b_n), если ее первые четыре члена следующие:

1) 4, 8, 16, 32;
2) 8, 24, 72, 216;
3) –5, 10, –20, 40;
4) –50, 10, –2, 0,4;
5) $3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9}$;
6) $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{16}$;
7) $\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4$;
8) $5,\ -5\sqrt{3},\ 15,\ -15\sqrt{3}$;
9) –6, 6, –6, 6;
10) 1, 1, 1, 1.

4.54. Сравните с нулем члены геометрической прогрессии (b_n), если известно, что ее первый член отрицательный, а знаменатель:

1) положительный;
2) отрицательный.

4.55°. Напишите формулу n-го члена геометрической прогрессии, если ее первые три члена следующие:

1) 4, 20, 100;
2) 3, 12, 48;
3) $\frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{9}$;
4) $1,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{25}$;
5) $-3,\ 4,\ -\frac{16}{3}$;
6) $-4,\ -1,\ -\frac{1}{4}$;
7) 32, 16, 8;
8) 2, –4, 8.

4.56. В геометрической прогрессии (b_n) укажите b_1, b_2, b_3, b_{n-1}, b_{n+1}, если:

1) $b_n = 10 \cdot 2^{n-1}$;
2) $b_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$;
3) $b_n = 4 \cdot 5^{n+1}$;
4) $b_n = 2 \cdot 3^{n+1}$.

4.57°. Дана геометрическая прогрессия (b_n). Вычислите:

1) b_5, если $b_1 = 2$, $q = 6$;

2) b_7, если $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{4}$;

3) b_8, если $b_1 = 1$, $q = -3$;

4) b_9, если $b_1 = -2$, $q = -\frac{1}{2}$;

5) b_{10}, если $b_1 = 3$, $q = -1$;

6) b_{12}, если $b_1 = -5$, $q = 1$;

7) b_6, если $b_1 = -1$, $q = \sqrt{2}$;

8) b_{11}, если $b_1 = 1$, $q = -\sqrt{2}$.

4.58. Найдите знаменатель q геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_1 = 128$, $b_7 = 2$;
2) $b_1 = 2$, $b_5 = 162$;
3) $b_1 = 6$, $b_4 = -162$;
4) $b_1 = 125$, $b_4 = -1$.

4.59. 1) В геометрической прогрессии 5, 10, 20, ... найдите номер члена, равного 320.

2) В геометрической прогрессии 4, 12, 36, ... найдите номер члена, равного 972.

3) В геометрической прогрессии −1, 2, −4, ... найдите номер члена, равного −256.

4) В геометрической прогрессии −486, 162, −54, ... найдите номер члена, равного $-\frac{2}{3}$.

4.60. Укажите b_1, q и формулу n-го члена геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_3 = 12$, $b_6 = 324$;
2) $b_5 = 24$, $b_8 = 192$;
3) $b_2 = 224$, $b_4 = 14$;
4) $b_3 = -54$, $b_6 = -2$.

4.61. Найдите b_5 в геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_2 = \frac{1}{4}$, $b_8 = 16$;
2) $b_3 = -2$, $b_6 = -250$;
3) $b_2 = 6$, $b_4 = 1$;
4) $b_4 = -\frac{1}{4}$, $b_6 = -\frac{1}{64}$.

4.62. Последовательность (b_n) задана формулой n-го члена. Докажите, что данная последовательность является геометрической прогрессией, и найдите b_1 и b_4, если:

1) $b_n = 7 \cdot 4^n$;
2) $b_n = 2 \cdot 5^{n-2}$;
3) $b_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{n+1}$;
4) $b_n = -\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.

4.63. Запишите первые пять членов геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_1 = \frac{1}{5},\ b_3 = 125;$ 2) $b_2 = \frac{1}{6},\ b_4 = \frac{25}{96};$

3) $b_5 = 11,\ b_7 = 99;$ 4) $b_4 = 100,\ b_6 = 9.$

4.64. Найдите седьмой член и знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_6 = 81,\ b_8 = \frac{1}{9};$ 2) $b_6 = 3,\ b_8 = 9;$

3) $b_6 = 243,\ b_8 = 27;$ 4) $b_6 = 4,\ b_8 = 1.$

4.65. Найдите b_5 и b_1 в геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_4 = 5,\ b_6 = 20;$ 2) $b_4 = 16,\ b_6 = 9;$

3) $b_4 = 1458,\ b_6 = 729;$ 4) $b_4 = 2,\ b_6 = 4.$

4.66. Найдите b_7 в геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_2 = 3,\ b_4 = 27;$ 2) $b_3 = 5,\ b_5 = 20;$

3) $b_4 = 5\frac{5}{8},\ b_6 = 2\frac{1}{2};$ 4) $b_2 = 25,\ b_4 = 16.$

4.67. Найдите число t, если данные три числа являются последовательными членами геометрической прогрессии:

1) $\frac{1}{4},\ t,\ 4;$ 2) $\frac{1}{5},\ t,\ \frac{1}{80};$ 3) $-4,\ t,\ -100;$

4) $-5,\ t,\ -45;$ 5) $-1,\ -t,\ -1;$ 6) $1,\ t,\ 1;$

7) $2,\ t,\ 16;$ 8) $3,\ t,\ 24;$ 9) $\frac{1}{6},\ t,\ 96.$

4.68. 1) Между числами $\frac{1}{5}$ и 25 вставьте два числа так, чтобы получились четыре последовательных члена геометрической прогрессии.

2) Между числами $\frac{1}{5}$ и 2000 вставьте три числа так, чтобы получились пять последовательных членов геометрической прогрессии.

4.69*. Является ли геометрической прогрессией числовая последовательность (b_n), если:

1) $b_n = \frac{2 \cdot 3^n}{3};$ 2) $b_n = \frac{4 \cdot 5^n}{5};$

3) $b_n = 3 \cdot 2^n + 2;$ 4) $b_n = 7 \cdot 4^n + 4?$

4.70*. Докажите, что:

1) модуль каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, является средним геометричес-

ким* предыдущего и последующего членов этой прогрессии, т. е. $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$;

2) если числовая последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, то модуль каждого ее члена (начиная с $(k+1)$-го) равен среднему геометрическому двух членов, отстоящих от этого члена на k мест, т. е. $|b_n| = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}}$;

3) если модуль каждого члена числовой последовательности, начиная со второго, является средним геометрическим предыдущего и последующего членов, то эта последовательность — геометрическая прогрессия.

4.71*. Изобразите график геометрической прогрессии, у которой:

1) $b_1 = 2,\ q = 2$; 2) $b_1 = -3,\ q = 0{,}5$;

3) $b_1 = \frac{1}{2},\ q = -3$; 4) $b_1 = -3,\ q = -2$;

5) $b_1 = 1,\ q = 5$; 6) $b_1 = -1,\ q = 4$;

7) $b_1 = -1,\ q = -6$; 8) $b_1 = 1,\ q = -3$.

4.5. Сумма *n* первых членов геометрической прогрессии

Сумму *n* первых членов геометрической прогрессии (b_n) будем обозначать S_n, т. е.

$$\boldsymbol{S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

Теорема 1. Для геометрической прогрессии (b_n) верны утверждения:

1) если $q = 1$, то $S_n = n \cdot b_1$;

2) если $q \neq 1$, то $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Доказательство. 1) Если $q = 1$, то

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot 1^{n-1} = b_1$$

и, значит,

$$S_n = \underbrace{b_1 + b_1 + \ldots + b_1}_{n \text{ раз}} = n \cdot b_1. \boxtimes$$

---

* Средним геометрическим двух неотрицательных чисел x и y называется число $\sqrt{xy}$.

2) Пусть $q \neq 1$. Имеем

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} + b_n. \qquad (1)$$

Умножим обе части этого равенства на q. Учитывая, что $b_k q = b_{k+1}$, имеем

$$S_n q = b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n + b_n q. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$S_n q - S_n = b_n q - b_1.$$

Откуда

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}.$$

Воспользовавшись формулой n-го члена, получим:

$$S_n = \frac{b_1 q^n - b_1}{q - 1}, \quad \text{т. е.} \quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}. \ \boxtimes$$

Пример 1. Найти S_5 для геометрической прогрессии (b_n), если $b_n = 7(-2)^{n-1}$.

Решение. Из условия имеем: $b_1 = 7$; $b_2 = -14$. Поскольку $b_2 = b_1 \cdot q$, то $q = \frac{-14}{7} = -2$. По формуле для S_n находим:

$$S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{7((-2)^5 - 1)}{-2 - 1} = \frac{7(-33)}{-3} = 77.$$

Ответ: $S_5 = 77$.

а С давних времен известны задачи и легенды, связанные с неправдоподобной на первый взгляд скоростью роста геометрической прогрессии $b_n = 2^n$. Вот одна из наиболее известных легенд.

Индийский царь Шерам призвал к себе изобретателя шахмат по имени Сета и предложил, чтобы он сам назначил для себя награду за создание мудрой игры. Сета попросил выдать ему за первую клетку шахматной доски 1 пшеничное зерно, за вторую — 2, за третью — 4, за четвертую — 8, за пятую — 16 и т. д. Царя изумила скромность просьбы Сета. Но, как оказалось, Шерам не смог выполнить ее — во всем царстве не хватило зерен, чтобы отдать нужное количество. Сета должен был получить $S_{64} = 2^{64} - 1$ (ведь $b_1 = 1$, $q = 2$) зерен, а это число равно

$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Эта задача привлекла внимание русского писателя Л. Н. Толстого. Он вычислил, что если полагать в одном пуде зерна (1 пуд = 16 кг) 40 000 зерен, то только за 64-ю клетку надо отдать 230 584 300 921 369 пудов. Определите, сколько это тонн.
Дальнейшие расчеты показывают, что с учетом возможности разместить в одном вагоне поезда 60 т зерна понадобится поезд, длина которого превосходит длину экватора Земли (40 000 км) более чем в 30 000 раз!

Теорема 2. Пусть b_1, b_2, b_3, ..., b_n — первые n членов геометрической прогрессии и p — натуральное число, $1 \leqslant p \leqslant n - 1$. Тогда верно равенство

$$b_{1+p} \cdot b_{n-p} = b_1 \cdot b_n. \qquad (3)$$

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства (3), используя формулу n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_{1+p} \cdot b_{n-p} = b_1 \cdot q^{1+p-1} \cdot b_1 \cdot q^{n-p-1} = b_1^2 \cdot q^{p+(n-p-1)} = b_1^2 \cdot q^{n-1}.$$

Преобразуем теперь правую часть равенства (3), используя формулу n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_1 \cdot b_n = b_1 \cdot b_1 \cdot q^{n-1} = b_1^2 \cdot q^{n-1}. \boxtimes$$

О любых первых n членах геометрической прогрессии говорят, что они образуют ***конечную геометрическую прогрессию***. Первый и n-й члены этой прогрессии называются ее ***концами*** (***крайними членами***). При этом равенство (3) читается так:

! *в конечной геометрической прогрессии произведения членов, равноотстоящих от ее концов, равны произведению крайних членов.*

Пример 2. Найти десятый член геометрической прогрессии (b_n), если известно, что

$$b_1 \cdot b_{13} = 256 \text{ и } b_4 = 2.$$

Решение. По формуле n-го члена геометрической прогрессии запишем:

$$b_1 \cdot b_{13} = b_1 \cdot b_1 \cdot q^{12} = b_1^2 \cdot q^{12},$$
$$b_4 = b_1 \cdot q^3.$$

Согласно условию имеем систему уравнений

$$\begin{cases} b_1^2 \cdot q^{12} = 256, \\ b_1 \cdot q^3 = 2. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $q^6 = 64$, откуда $q = -2$ или $q = 2$. Соответственно, $b_1 = -\frac{1}{4}$ или $b_1 = \frac{1}{4}$.

Таким образом,

$$b_{10} = b_1 \cdot q^9 = -\frac{1}{4} \cdot (-2)^9 = 2^7 = 128$$

или

$$b_{10} = b_1 \cdot q^9 = \frac{1}{4} \cdot 2^9 = 2^7 = 128.$$

Ответ: $b_{10} = 128$.

Пример 2 можно решить иначе, если заметить, что $b_4 = b_{1+3}$ и $b_{10} = b_{13-3}$. Тогда по формуле (3) получим

$$b_1 \cdot b_{13} = b_{1+3} \cdot b_{13-3}, \text{ т. е. } b_1 \cdot b_{13} = b_4 \cdot b_{10}.$$

Из последнего равенства и из условия имеем $256 = 2 \cdot b_{10}$, значит, $b_{10} = 128$.

1. Как обозначается сумма n первых членов геометрической прогрессии?

2. Сформулируйте свойство членов конечной геометрической прогрессии, равноудаленных от ее концов.

3. Как образуется конечная геометрическая прогрессия?

4. По каким формулам можно вычислить сумму n первых членов геометрической прогрессии?

Упражнения

4.72°. Найдите сумму n первых членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = \frac{1}{3}$, $q = 2$, $n = 6$; 2) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = -2$, $n = 6$;

3) $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{5}$, $n = 5$; 4) $b_1 = 10$, $q = -\frac{1}{5}$, $n = 5$;

5) $b_1 = 5$, $q = -1$, $n = 9$; 6) $b_1 = -4$, $q = 1$, $n = 200$.

4.73°. Найдите сумму n первых членов геометрической прогрессии:

1) 5, 10, 20, ... при $n = 6$; 2) 2, 6, 18, ... при $n = 6$;

3) $-\frac{3}{5}$, 3, −15, ... при $n = 7$; 4) $\frac{2}{3}$, −2, 6, ... при $n = 7$;

5) 162, 54, 18, ... при $n = 7$;
6) 128, 64, 32, ... при $n = 6$;
7) $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... при $n = 6$;
8) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, ... при $n = 8$.

4.74°. Найдите сумму:

1) $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 256$;
2) $1 + 3 + 9 + 27 + ... + 729$;
3) $243 + 81 + 27 + ... + \frac{1}{27}$;
4) $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{512}$.

4.75. Найдите b_8 и S_{10} геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_2 = 9$, $b_3 = 27$;
2) $b_3 = 5$, $b_4 = 15$;
3) $b_2 = 3$, $b_4 = 12$, $q < 0$;
4) $b_2 = 11$, $b_3 = 55$;
5) $b_1 \cdot b_{12} = 128$ и $b_5 = 4$;
6) $b_1 \cdot b_{13} = 729$ и $b_6 = 9$;
7) $b_1 \cdot b_{14} = 729$ и $b_7 = 27$;
8) $b_1 \cdot b_{11} = 256$ и $b_4 = 16$.

4.76. Найдите число членов конечной геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_1 = 3$, $b_n = 96$, $S_n = 189$;
2) $b_1 = 1$, $b_n = -512$, $S_n = -341$;
3) $q = 3$, $b_n = 567$, $S_n = 847$;
4) $q = 2$, $b_n = 96$, $S_n = 189$.

4.77. Дана геометрическая прогрессия (b_n). Найдите:

1) b_1 и b_7, если $q = 2$, $n = 7$, $S_n = 635$;
2) b_1 и b_8, если $q = -2$, $n = 8$, $S_n = 85$;
3) n и b_n, если $q = 2$, $b_1 = 8$, $S_n = 4088$;
4) n и b_n, если $q = 3$, $b_1 = 7$, $S_n = 847$;
5) b_1 и q, если $b_3 = 112$, $S_3 = 147$;
6) b_1 и q, если $b_3 = 8$, $S_3 = 14$.

4.78. Геометрическая прогрессия задана формулой n-го члена. Найдите S_n, если:

1) $b_n = 5 \cdot 2^{n-1}$, $n = 8$;
2) $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$, $n = 4$;
3) $b_n = 4\left(-\frac{1}{3}\right)^n$, $n = 3$;
4) $b_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n = 6$.

4.79. Для геометрической прогрессии (b_n) найдите:

1) q, если $b_1 = 1$ и $b_3 + b_5 = 90$;
2) q, если $b_1 = 3$ и $b_7 - b_4 = 168$;
3) S_8, если $b_1 - b_3 = 15$ и $b_2 - b_4 = 30$;
4) S_{14}, если $b_3 - b_1 = 24$ и $b_5 - b_1 = 624$.

4.80*. 1) Докажите, что если числовая последовательность (b_n) — конечная геометрическая прогрессия, содержащая n членов, и сумма номеров двух ее членов равна $n+1$, то произведение этих членов равно $b_1 \cdot b_n$.

2) Запишите конечную геометрическую прогрессию, состоящую из 4 членов, зная, что сумма крайних ее членов равна 9360, а сумма средних членов равна 2880.

3) Запишите конечную геометрическую прогрессию, состоящую из 6 членов, зная, что сумма трех первых ее членов равна 156, а сумма трех последних равна 4212.

▲ 4.6. Задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии

Пример 1. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 120. Известно, что ее второй, третий и четвертый члены различны и являются соответственно первым, пятым и седьмым членами арифметической прогрессии. Найти первый член геометрической прогрессии и первый член арифметической прогрессии.

Решение. Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью d, а (b_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q. Тогда по условию имеем: $S_4 = \frac{b_1(q^4-1)}{q-1} = 120$, $a_1 = b_2$, $a_5 = b_3$, $a_7 = b_4$. Использовав формулы n-го члена арифметической и n-го члена геометрической прогрессий, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1(q^2+1)(q+1) = 120, \\ a_1 = b_1 q, \\ a_1 + 4d = b_1 q^2, \\ a_1 + 6d = b_1 q^3. \end{cases}$$

Заменив в 3-м и 4-м уравнениях a_1 на $b_1 q$ и выразив из них d, получим:

$$\begin{cases} b_1(q^3+q^2+q+1) = 120, \\ a_1 = b_1 q, \\ d = \frac{b_1 q^2 - b_1 q}{4}, \\ d = \frac{b_1 q^3 - b_1 q}{6}. \end{cases} \qquad (1)$$

Приравняв правые части двух последних уравнений системы (1), получим новое уравнение, обе части которого можно разделить на $\frac{b_1 q}{2}$. После чего имеем:

$$\frac{q-1}{2} = \frac{q^2-1}{3}, \text{ т. е. } 2q^2 - 3q + 1 = 0.$$

Решив это уравнение, получим

$$q = \frac{1}{2} \text{ или } q = 1.$$

Поскольку по условию члены геометрической прогрессии различны, то $q = \frac{1}{2}$.

Из первого уравнения системы (1) находим

$$b_1 = \frac{120}{\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{120 \cdot 8}{1 + 2 + 4 + 8} = \frac{120 \cdot 8}{15} = 64.$$

Из второго уравнения системы (1) находим

$$a_1 = 64 \cdot \frac{1}{2} = 32.$$

Ответ: $b_1 = 64$; $a_1 = 32$.

Пример 2. Существуют ли такие три различных положительных числа, которые одновременно образуют арифметическую и геометрическую прогрессии?

Решение. Пусть m_1, m_2, m_3 — различные положительные числа, которые являются последовательными членами арифметической и геометрической прогрессий. Тогда верны равенства

$$m_2 = \frac{m_1 + m_3}{2} \text{ и } m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$$

(поясните почему). Приравняв правые части этих равенств, получим верное числовое равенство

$$\frac{m_1 + m_3}{2} = \sqrt{m_1 m_3},$$

оно равносильно равенству $m_1 + m_3 - 2\sqrt{m_1 m_3} = 0$, т. е. $\left(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_3}\right)^2 = 0$, и, значит, $m_1 = m_3$. Но это противоречит условию. Значит, такие числа не существуют.

Ответ: не существуют.

С использованием формул n-го члена арифметической и n-го члена геометрической прогрессий связаны расчеты при решении различных практических задач. Рассмотрим, например, задачи о банковских вкладах — депозитах*.

Каждый вкладчик при хранении денег в банке ежегодно получает от банка вознаграждение: годовые проценты, начисленные на сумму вклада. При этом годовые проценты могут начисляться на депозит двумя способами: либо с их последующей капитализацией, либо без их капитализации.

При ***капитализации*** ежегодно происходит начисление процентов на сумму вклада, включая и ранее начисленные по нему проценты, т. е. проценты начисляются на всю накопленную сумму. А ***без капитализации*** начисление процентов происходит только на сумму исходного вклада без включения в нее ранее начисленных процентов.

Пример 3. Буратино положил k золотых в банк «Шанс» под p % годовых без их капитализации. Сколько золотых будет на счету Буратино через 2 года? через 5 лет? через n лет?

Решение. По условию ежегодно вклад увеличивается на p % от исходной суммы. Пусть исходная сумма $K_0 = k$. Через год на счету Буратино будет сумма:

$$K_1 = k + k\frac{p}{100} = k + \frac{kp}{100}.$$

Через 2 года на счету будет сумма:

$$K_2 = k + k\frac{p}{100} + k\frac{p}{100} = k + 2\frac{kp}{100}.$$

Через 3 года сумма вклада будет следующей:

$$K_3 = k + k\frac{p}{100} + k\frac{p}{100} + k\frac{p}{100} = k + 3\frac{kp}{100}.$$

Аналогично через 4 года и через 5 лет получим:

$$K_4 = k + 4\frac{kp}{100} \quad \text{и} \quad K_5 = k + 5\frac{kp}{100}.$$

Очевидно, что через n лет Буратино получит сумму:

$$K_n = k + n\frac{kp}{100}. \qquad (2)$$

Ответ: $K_2 = k + 2\frac{kp}{100}$, $K_5 = k + 5\frac{kp}{100}$, $K_n = k + n\frac{kp}{100}$.

Нетрудно заметить, что числа K_0, K_1, K_2, ..., K_n образуют арифметическую прогрессию (a_n), где $a_1 = k$ и $d = \frac{kp}{100}$.

---

* Депозит (от латинского слова *depositum* — вещь, отданная на хранение) — вклад — денежные средства или ценные бумаги (акции, облигации), помещаемые для хранения в банк.

Формулу (2) называют ***формулой простых процентов*** — по ней можно рассчитать, какой будет сумма вклада, положенного в банк на n лет под $p\ \%$ годовых без их капитализации. Пользуясь этой формулой, узнайте, сколько золотых получит Буратино через 2 года в банке «Шанс», положив туда 25 золотых под $20\ \%$ годовых.

Пример 4. Мальвина положила k золотых в банк «Фортуна» под $p\ \%$ годовых с их последующей ежегодной капитализацией. Сколько золотых будет на счету Мальвины через 2 года? через 5 лет? через n лет?

Решение. По условию ежегодно вклад увеличивается на $p\ \%$ от накопленной суммы. Пусть исходная сумма $K_0 = k$. Через год на счету Мальвины будет накоплена сумма:

$$K_1 = k + k\frac{p}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Через 2 года на счету будет сумма:

$$K_2 = k\left(1 + \frac{p}{100}\right) + k\left(1 + \frac{p}{100}\right)\frac{p}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Через 3 года сумма вклада будет следующей:

$$K_3 = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 + k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2\frac{p}{100} = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3.$$

Аналогично через 4 года и через 5 лет получим:

$$K_4 = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^4 \quad \text{и} \quad K_5 = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^5.$$

Очевидно, что через n лет Мальвина получит сумму:

$$K_n = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n. \qquad (3)$$

Ответ: $K_2 = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$, $K_5 = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^5$, $K_n = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Нетрудно заметить, что числа $K_0, K_1, K_2, ..., K_n$ образуют геометрическую прогрессию (b_n), где $b_1 = k$ и $q = 1 + \frac{p}{100}$.

Формулу (3) называют ***формулой сложных процентов*** — по ней можно рассчитать, какой будет сумма вклада, положенного в банк на n лет под $p\ \%$ годовых с их последующей ежегодной капитализацией. Пользуясь этой формулой, узнайте, сколько золотых получит Мальвина через 2 года в банке «Фортуна», положив туда 25 золотых под $20\ \%$ годовых.

Кто выгоднее разместил в банке 25 золотых на 2 года — Буратино или Мальвина (поясните свой ответ)?

Пример 5*. В банках A, B и C вклады от населения принимаются под 12 % годовых. При этом начисление процентов и их последующая капитализация производятся в банке A ежеквартально, в банке B — каждые полгода, а в банке C — ежегодно. В какой из банков выгоднее положить 1 000 000 р. сроком на 1 год?

Решение. Для ответа на этот вопрос надо сравнить значения следующих выражений (поясните, как они получены):

$$S_A = 1\,000\,000\,(1 + 0{,}03)^4;$$
$$S_B = 1\,000\,000\,(1 + 0{,}06)^2;$$
$$S_C = 1\,000\,000\,(1 + 0{,}12).$$

Вычисления показывают, что наиболее выгодными являются условия хранения денег в банке A (убедитесь в этом).

Ответ: в банк A.

А в каком из банков прибыль будет наименьшей?

?

1*. Какую формулу называют формулой простых процентов?

2*. Какую формулу называют формулой сложных процентов?

3*. Докажите, что не существует числовой последовательности (a_n) с различными членами, которая одновременно является и арифметической, и геометрической прогрессией.

Упражнения

4.81. В арифметической прогрессии 11 различных членов. Ее первый, пятый и одиннадцатый члены являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите все члены арифметической прогрессии, если ее первый член равен 24.

4.82. Первый член арифметической прогрессии (a_n) равен 1, а сумма ее первых семи членов равна 91. Найдите десятый член геометрической прогрессии (b_n), если $a_1 = b_1$ и $a_7 = b_7$.

4.83. Задайте формулой n-го члена арифметическую и геометрическую прогрессии, если известно, что разность арифметической прогрессии отлична от нуля, первый член каждой прогрессии равен 2, третьи члены обеих прогрессий равны между собой, а одиннадцатый член арифметической прогрессии равен пятому члену геометрической.

4.84. Первый член арифметической прогрессии и первый член геометрической прогрессии равны 3. Второй член арифметической прогрессии больше второго члена геометрической на 6, а третьи члены прогрессий одинаковы. Задайте эти прогрессии формулами n-го члена.

4.85*. Три различных числа a, b, c, сумма которых равна 52, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Одновременно эти числа являются соответственно четвертым, шестым и двенадцатым членами арифметической прогрессии. Найдите числа a, b, c.

4.86*. Три различных числа a, b, c, сумма которых равна 147, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Одновременно эти числа являются соответственно третьим, десятым и тридцать восьмым членами арифметической прогрессии. Найдите числа a, b, c.

4.87. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. Известно, что пятый, восьмой и одиннадцатый члены этой прогрессии различны и являются соответственно первым, вторым и десятым членами арифметической прогрессии. Найдите первый член геометрической прогрессии.

4.88. Числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, сумма которых равна 62, являются первыми пятью членами геометрической прогрессии, а числа b_3, $1{,}25b_4$, b_5 — последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии.

4.89. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 33. Если к первому члену этой прогрессии прибавить 1, к третьему 2, а от второго отнять 1, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

4.90. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 21. Если к ним соответственно прибавить 2, 3 и 9, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

4.91. Сумма трех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна 65. Если от меньшего из этих чисел отнять 1, а от большего 19, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

4.92. Найдите четыре числа, из которых первые три составляют арифметическую, а последние три — геометрическую прогрессии, если сумма двух крайних чисел равна 22, а сумма двух средних чисел равна 20.

4.93*. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если ко второму числу прибавить 8, то эти числа составят арифметическую прогрессию. Если затем к третьему числу прибавить 64, то полученные числа вновь составят геометрическую прогрессию. Найдите исходные числа.

4.94*. Даны арифметическая (a_n) и геометрическая (b_n) прогрессии. Два первых члена геометрической прогрессии совпадают соответственно с первым и вторым членами арифметической прогрессии, и сумма этих двух членов равна 24, а третий член геометрической прогрессии больше третьего члена арифметической прогрессии на 8. Задайте эти прогрессии формулами n-го члена.

4.95*. Найдите числа, одновременно являющиеся членами арифметической прогрессии 12, 15, 18, ... и геометрической прогрессии 1, 3, 9, ..., если каждая из этих прогрессий содержит по 100 членов.

4.96*. Пусть a_1, a_2, a_3 — конечная арифметическая прогрессия, разность которой не равна нулю. Известно, что a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1 — конечная геометрическая прогрессия. Найдите ее знаменатель.

4.97. 1) В какую сумму обратится вклад в 200 000 р., положенный в банк на 5 лет, если банк ежегодно увеличивает имеющуюся на счету сумму на 2 % без капитализации?

2) Банк ежегодно увеличивает имеющуюся на счету сумму на 3 % с последующей капитализацией. Внесено 500 000 р. Какой станет сумма вклада через 2 года?

4.98. 1) Какой примерно вклад надо внести в банк под 3 % годовых, начисляемых ежегодно, с капитализацией, чтобы через 3 года получить 458 000 р.?

2) Вкладчик внес в банк 600 000 р., а через год у него на счету оказалось 642 000 р. Под какие проценты, начисляемые ежегодно, был внесен вклад?

4.99. 1) В городе 200 тыс. жителей. Сколько жителей в нем будет через 10 лет, если ежегодный прирост населения в среднем составляет 4 %?

2) В настоящее время в городе проживает 400 тыс. человек. Какой была численность населения 5 лет назад, если ежегодный прирост населения города составлял в среднем 2,5 %?

4.100*. Члены арифметической (a_n) и геометрической (b_n) прогрессий удовлетворяют условиям $a_{40} = b_{40} > 0$, $a_{60} = b_{60} > 0$. Сравните члены прогрессий a_{50} и b_{50} $(a_{40} \neq a_{60})$.

Материалы для повторения теоретических вопросов арифметики и алгебры курса математики 5—9-х классов

Натуральные и целые числа

Числа 1, 2, 3, 4, 5, ..., возникающие при счете, называют ***натуральными*** или ***целыми положительными***. ***Множество всех натуральных чисел*** обозначается буквой $\boldsymbol{N}$.

Пусть a и b — натуральные числа. Говорят, что ***a делится на b***, если существует такое натуральное число s, что $a = bs$. Число b называется ***делителем*** числа a, число a называется ***кратным*** числа b, число s называется ***частным*** чисел a и b.

Натуральное число, большее 1, которое имеет только два делителя (1 и само себя), называется ***простым***. Натуральное число, которое имеет более двух делителей, называется ***составным***. Число 1 не является ни простым, ни составным. Составное число можно разложить на простые множители, т. е. представить в виде произведения простых чисел или их степеней.

Наибольшим общим делителем (***НОД***) двух натуральных чисел a и b называется наибольшее натуральное число, на которое делятся a и b. Если НОД $(a, b) = 1$, то числа a и b называются ***взаимно простыми***.

Наименьшим общим кратным (***НОК***) двух натуральных чисел a и b называется наименьшее натуральное число, которое делится на a и на b.

Числа вида $(-m)$, где m — натуральное число, называют ***отрицательными целыми числами***. Множество, состоящее из всех натуральных чисел, нуля и всех отрицательных целых чисел, называется ***множеством целых чисел*** и обозначается буквой $\boldsymbol{Z}$.

Разделить целое число a на натуральное число b с остатком — значит представить a в виде $a = bs + r$, где s и r — целые числа, $0 \leqslant r < b$.

Для любого целого числа a и натурального числа b деление с остатком возможно, и причем однозначно.

Дроби. Рациональные числа

Пусть $n > 1$ — натуральное число; n-я часть единицы обозначается $\frac{1}{n}$. Эта часть, взятая k раз (k — натуральное число), обозначается $\frac{k}{n}$ и называется ***положительной дробью*** или просто ***дробью***. Дробь $\frac{k}{n}$ называют еще ***обыкновенной***.

Если $k < n$, то дробь $\frac{k}{n}$ называется ***правильной***, а если $k \geqslant n$, то — ***неправильной***. Всякое натуральное число можно считать дробью со знаменателем 1.

Дробь $\frac{a}{10^m}$, где $m \in \boldsymbol{Z}$, $m \geqslant 0$, записанная в виде

$$a_0, a_1a_2a_3 \dots a_m,$$

где a_0 — целое неотрицательное число, а a_1, a_2, a_3, ..., a_m — цифры, называется ***конечной десятичной дробью***.

Дроби со знаком «минус», т. е. числа вида $-\frac{k}{n}$, где k и n — натуральные числа, называются ***отрицательными дробями***. Множество, состоящее из всех положительных дробей, нуля и всех отрицательных дробей, называется ***множеством рациональных чисел*** и обозначается буквой $\boldsymbol{Q}$.

Определение равенства дробей: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, если $ad = bc$.

Основное свойство дроби: $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ $(k \neq 0)$.

Дробь $\frac{a}{b}$ называется ***несократимой***, если a и b взаимно просты.

Правила действий над дробями:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Каждое рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное число. Если при этом m — положительное, то рациональное число называется ***положительным***, а если m — отрицательное, то рациональное число называется ***отрицательным***.

Бесконечная десятичная дробь, которая содержит, начиная с некоторого места после запятой, повторяющуюся группу цифр, называется ***периодической***, а эта группа цифр называется ***периодом***.

Количество цифр в периоде называется ***длиной периода***. Каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Действительные числа

Для нужд математики рациональных чисел недостаточно, поэтому вводятся ***иррациональные числа***. Каждое иррациональное число можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Множество, состоящее из всех рациональных и всех иррациональных чисел, называется ***множеством действительных чисел*** и обозначается буквой $\boldsymbol{R}$.

Основные свойства сложения и умножения действительных чисел.

Переместительный закон: $a + b = b + a$, $ab = ba$.

Сочетательный закон: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(ab)c = a(bc)$.

Распределительный закон: $(a + b)c = ac + bc$.

Для любого действительного числа a имеют место равенства:

$$a + 0 = a; \qquad a \cdot 1 = a.$$

Для любого числа a существует ***противоположное ему число*** $-a$. Для любого числа $a \neq 0$ существует ***обратное ему число*** $a^{-1} = \frac{1}{a}$. При этом имеют место равенства:

$$a + (-a) = 0; \qquad a \cdot a^{-1} = 1.$$

Сравнение действительных чисел. Действительное число может быть либо положительным, либо отрицательным, либо нулем. Действительные числа можно сравнить поразрядно.

Число a больше числа b ($a > b$), если разность $a - b$ положительное число; число a меньше числа b ($a < b$), если разность $a - b$ отрицательное число.

Каждой точке на координатной прямой соответствует определенное действительное число — координата этой точки. Наоборот, каждому действительному числу a соответствует определенная точка на координатной прямой — точка с координатой a.

Модуль действительного числа a (обозначается $|a|$) определяется так: $|a| = a$, если $a \geqslant 0$, и $|a| = -a$, если $a < 0$.

Действительные числа ***приближаются конечными десятичными дробями*** с точностью до 10^{-n} с недостатком и с избытком. Например, 3,14 — приближение числа

$\pi = 3{,}14159\ldots$ с точностью до 10^{-2} с недостатком, а 3,15 — приближение числа $\pi = 3{,}14159\ldots$ с точностью до 10^{-2} с избытком, т. е. $3{,}14 < \pi < 3{,}15$.

Проценты

Процентом называют одну сотую: $1\ \% = \frac{1}{100}$.

Нахождение числа x, которое равно p % числа a:

$$x = a \cdot p\ \% = a \cdot \frac{p}{100} = \frac{ap}{100}.$$

Нахождение числа x, если p % его равны b:

$$x = b : p\ \% = b : \frac{p}{100} = \frac{100b}{p}.$$

Пропорция

Частное $\frac{a}{b}$ чисел a и b называется ***отношением этих чисел***.

Равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ двух отношений $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ называется ***пропорцией***. Пропорцию можно записать и так: $a : b = c : d$.

Числа a и d называются ***крайними членами пропорции***, b и c — ***средними членами пропорции*** $\boldsymbol{a : b = c : d}$.

Основное свойство пропорции: *произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов, т. е.* $\boldsymbol{ad = bc}$.

Отношение размера некоторого предмета на его изображении к его реальному размеру называется ***масштабом***. Например, масштаб — это отношение расстояния между точками на карте к расстоянию между соответствующими объектами на местности.

Алгебраические выражения. Равенства и тождества

Выражение, составленное из чисел или букв, знаков действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень и извлечения арифметического корня, а также скобок, указывающих на порядок выполнения этих действий, называется ***алгебраическим***.

Если в алгебраическом выражении встречается *деление на нуль, извлечение корня четной степени из отрицательного числа* или *возведение нуля в нулевую или отрицательную степень*, то говорят, что такое выражение ***не имеет смысла***.

Если в алгебраическом выражении встречаются буквы, которые могут принимать различные значения, то эти буквы называются ***переменными***. Наборы значений, которые могут принимать переменные, образуют ***область определения выражения***. В область определения выражения могут входить только такие наборы значений переменных, при которых выражение имеет смысл. Все такие наборы значений образуют ***естественную область определения выражения*** (или, другими словами, область допустимых значений переменных, входящих в выражение).

Если в выражение вместо переменных подставить какой-либо набор их значений из области определения и выполнить все указанные в этом выражении действия, то получится число, которое называется ***значением выражения*** при этом наборе переменных.

Если два выражения A и B соединить знаком «=», то получится запись $A = B$, называемая ***равенством***. Выражение A называют ***левой частью***, а выражение B — ***правой частью*** равенства.

Когда обе части равенства являются числовыми выражениями, то оно называется ***числовым***. ***Верное числовое равенство*** — это такое равенство, в котором обе части имеют одно и то же значение.

Свойства верного числового равенства

1. *Если к обеим частям верного числового равенства прибавить одно и то же число или из обеих частей верного числового равенства вычесть одно и то же число, то получится верное числовое равенство.*

2. *Если в верном числовом равенстве перенести слагаемое из одной части в другую с противоположным знаком, то получится верное числовое равенство.*

3. *Если обе части верного числового равенства умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится верное числовое равенство.*

Условие равенства произведения нулю

1. Если множители не равны нулю, то и произведение не равно нулю, т. е. если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $ab \neq 0$.

2. Если произведение равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю, т. е. если $ab = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.

Тождество

Пусть A и B — выражения. Равенство $A = B$ называется ***тождеством***, если оно обращается в верное числовое равенство при любых значениях переменных, для которых оба выражения A и B *определены*, т. е. имеют смысл. Верное числовое равенство также является тождеством.

Если $A = B$ — тождество, то выражения A и B называются ***тождественно равными в общей области определения***.

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$\blacktriangle\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).\ \blacktriangle$$

Степень с целым показателем

Определение степени. Пусть n — натуральное число, a — действительное число. Тогда

$$a^n = \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ раз}} \text{ при } n \geqslant 2; \quad a^1 = a.$$

Пусть $n \leqslant 0$ — целое число, $a \neq 0$ — действительное число. Тогда

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \text{ при } n < 0; \quad a^0 = 1.$$

Выражение a^n называется ***n-й степенью числа a***, число a — ***основанием степени***, число n — ***показателем степени***.

Свойства степеней. Для любых действительных чисел $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любых целых m и n имеют место тождества:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; 3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

4) $(ab)^n = a^n b^n$; 5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

Запись положительного числа u в виде $u = a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — целое число, называется ***стандартным видом числа*** u, а n — ***порядком числа*** u.

Корень n-й степени. Квадратный корень

Корнем n-й степени из числа a называется такое число t, n-я степень которого равна a. Из любого числа a существует единственный корень нечетной степени. Из положительного числа a существует ровно два корня четной степени.

Неотрицательный корень n-й степени из положительного числа a называется ***арифметическим корнем n-й степени из числа a*** и обозначается $\sqrt[n]{a}$.

Свойства арифметических квадратных корней

1) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad (a \geqslant 0)$;

2) $\sqrt{a^2} = |a|$;

3) $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b} \quad (b \geqslant 0)$;

4) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$;

5) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geqslant 0,\ b > 0)$;

6) если $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, то $a > b$; если $a > b$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ ($a > 0$, $b \geqslant 0$).

Уравнения. Уравнения с одной переменной

Равенство, содержащее одну переменную, называется ***уравнением с одной переменной (одним неизвестным)***. Значение переменной (неизвестного), при котором уравнение обращается в верное числовое равенство, называется ***корнем (решением) уравнения***. ***Решить уравнение*** — это значит найти все его корни (решения) или доказать, что их нет.

Два уравнения называются ***равносильными***, если каждый корень первого уравнения является корнем второго, и наоборот — каждый корень второго уравнения является корнем первого. Равносильными считаются и уравнения, которые не имеют решений.

Свойства уравнений

1. *Если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.*

2. *Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получится уравнение, равносильное данному.*

3. *Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится уравнение, равносильное данному.*

Линейное уравнение

Уравнение вида $ax = b$, где a и b — числа, x — переменная (неизвестное), называется ***линейным***.

Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$.

Если $a = b = 0$, то корнем уравнения является любое число.

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение не имеет корней.

Квадратное уравнение

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — числа, $a \neq 0$, x — переменная (неизвестное), называется ***квадратным***. Число a называется ***старшим коэффициентом***, b — ***средним коэффициентом***, c — ***свободным членом*** квадратного уравнения.

Дискриминант квадратного уравнения $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня

$$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D = 0$, то уравнение имеет единственный корень

$$x_1 = -\frac{b}{2a}.$$

Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Квадратное уравнение со старшим коэффициентом, равным 1, называется ***приведенным***.

Квадратным трехчленом называется многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где a, b, c — числа, $a \neq 0$, x — переменная. ***Корнем квадратного трехчлена*** называется такое значение переменной, при котором он обращается в нуль. ***Дискриминантом квадратного трехчлена*** называется выражение

$$D = b^2 - 4ac.$$

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ с дискриминантом $D \geqslant 0$ разлагается на линейные множители: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 — корни этого трехчлена, причем если $D > 0$, то $x_1 \neq x_2$, а если $D = 0$, то $x_1 = x_2$.

Если $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$, то x_1 называется ***кратным корнем квадратного трехчлена*** $ax^2 + bx + c$ (***кратным корнем уравнения*** $ax^2 + bx + c = 0$). В следующей теореме, говоря о сумме и произведении корней квадратного уравнения, учитывают и случай кратного корня: когда квадратное уравнение имеет кратный корень, он берется дважды.

Теорема Виета. Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

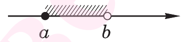
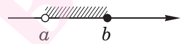
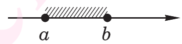
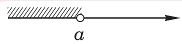
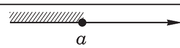
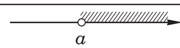
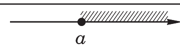
$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1 x_2 = q.$$

Теорема, обратная теореме Виета. Если для чисел x_1 и x_2 верны равенства $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Рациональные уравнения (см. п. 2.7).

Уравнения с двумя переменными (см. п. 3.1).

Неравенства с одной переменной

Условие, которому удовлетворяет число x	Обозначение множества всех чисел, удовлетворяющих этому условию	Изображение этого множества на координатной прямой
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$	
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$	
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$	

Неравенство, содержащее одну переменную, называется ***неравенством с одной переменной*** или ***неравенством с одним неизвестным***.

Решением неравенства с одной переменной (неизвестным) называется такое значение переменной (неизвестного), при котором это неравенство превращается в верное числовое неравенство. ***Решить неравенство*** — это значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Два неравенства называются ***равносильными***, если каждое решение одного неравенства является решением другого, и наоборот, т. е. если они имеют одни и те же решения. Равносильными называются и неравенства, которые не имеют решений.

Свойства неравенств

1. *Если в неравенстве перенести слагаемое из одной части в другую с противоположным знаком, то получится неравенство, равносильное данному.*

2. *Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, то получится неравенство, равносильное данному.*

3. *Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство, равносильное данному.*

4. *Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.*

Линейным неравенством с одной переменной (с одним неизвестным) называется неравенство вида $ax > b$ ($ax \geqslant b$, $ax < b$, $ax \leqslant b$), где a и b — числа, x — неизвестное.

Квадратное неравенство (неравенство второй степени) с одним неизвестным (см. п. 2.2—2.5).

Рациональное неравенство (см. п. 2.7.)

Система неравенств с одним неизвестным (см. п. 2.7).

Функции (см. п. 1.1—1.6)

Функция $y = kx$ (k — число, $k \neq 0$) с областью определения — множеством $\boldsymbol{R}$ называется ***прямой пропорциональностью.***

Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат и не совпадающая ни с одной из координатных осей (рис. 143).

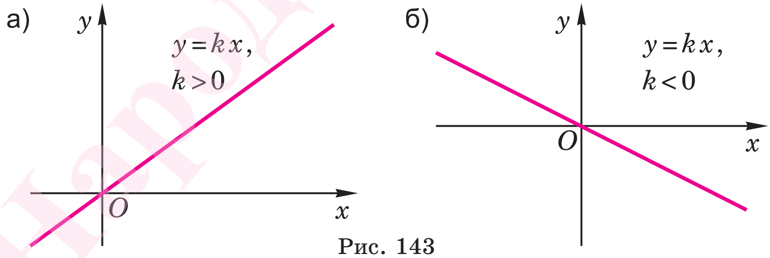


Рис. 143

Свойства прямой пропорциональности — функции, заданной формулой $y = kx$ ($k \neq 0$)

1. *Областью определения функции является множество действительных чисел* $\boldsymbol{R}$.

2. *Множеством значений функции является множество* $\boldsymbol{R}$.

3. *Функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений.*

4. *График функции проходит через начало координат — точку* (0; 0).

5. *Значение* $x = 0$ *является нулем функции.*

6. *При* $k > 0$: *если* $x \in (0; +\infty)$, *то* $y > 0$; *если* $x \in (-\infty; 0)$, *то* $y < 0$. *При* $k < 0$: *если* $x \in (0; +\infty)$, *то* $y < 0$; *если* $x \in (-\infty; 0)$, *то* $y > 0$. *Таким образом,* $(-\infty; 0)$ *и* $(0; +\infty)$ *— промежутки знакопостоянства функции.*

7. *При* $k > 0$ *функция возрастающая в области определения. При* $k < 0$ *функция убывающая в области определения.*

Линейной функцией называется функция вида $\boldsymbol{y = kx + b}$ (k и b — числа).

Графиком линейной функции $y = kx + b$ $(k \neq 0)$ является прямая, проходящая через точки с координатами $\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$ и $(0; b)$ (рис. 144).

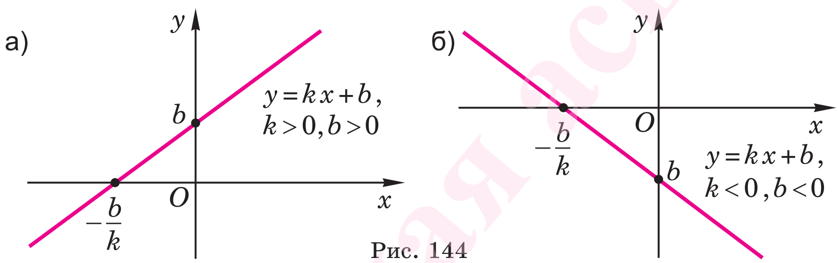


Рис. 144

Графиком линейной функции $y = kx + b$ при $k = 0$ является прямая $y = b$, проходящая через точку $(0; b)$ и параллельная оси Ox. При $b = 0$ график функции совпадает с осью Ox (рис. 145).

Любая прямая, не параллельная оси Oy, является графиком линейной функции.

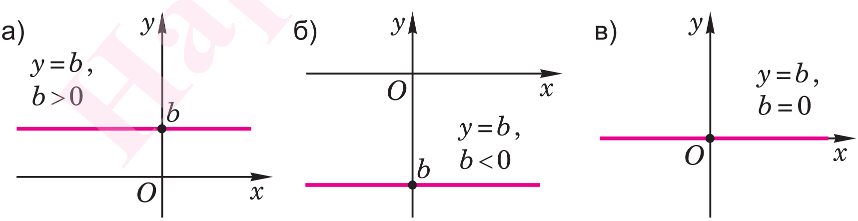


Рис. 145

Свойства линейной функции $\boldsymbol{y = kx + b}$

1. *Областью определения функции является множество действительных чисел* $\boldsymbol{R}$.

2. *Множеством значений функции при $k \neq 0$ является множество* $\boldsymbol{R}$. *При $k = 0$ множество значений функции состоит из одного числа b.*

3. *При $k \neq 0$ функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений; при $k = 0$ значение $y = b$ — единственное.*

4. *При $k \neq 0$ график функции пересекает оси Ox и Oy в точках* $\left(-\frac{b}{k};\ 0\right)$ и $(0;\ b)$. *При $k = 0$ есть только точка пересечения с осью Oy* (*при $b \neq 0$* — $(0;\ b)$; *при $k = b = 0$ график совпадает с осью Ox*).

5. *При $k \neq 0$ значение* $x = -\frac{b}{k}$ *является нулем функции. При $k = 0$ и $b \neq 0$ функция нулей не имеет. При $k = 0$ и $b = 0$ каждое действительное число является нулем функции.*

6. *При $k \neq 0$ промежутками знакопостоянства являются* $\left(-\infty;\ -\frac{b}{k}\right)$, $\left(-\frac{b}{k};\ +\infty\right)$. *При $k = 0$ и $b \neq 0$ промежутком знакопостоянства является* $(-\infty;\ +\infty)$.

7. *При $k > 0$ функция возрастающая в области определения. При $k < 0$ функция убывающая в области определения. При $k = 0$ функция постоянная в области определения.*

Функция $y = x^2$

График функции $y = x^2$ называется ***параболой*** (рис. 146).

Свойства функции $y = x^2$

1. *Областью определения функции является множество всех действительных чисел* $\boldsymbol{R}$.

2. *Множеством значений является промежуток* $[0;\ +\infty)$.

3. *Наименьшее значение функция принимает в точке $x = 0$; оно равно нулю. Наибольшего значения функции не существует.*

4. *Парабола имеет с осями координат единственную общую точку* $(0;\ 0)$ — *начало координат.*

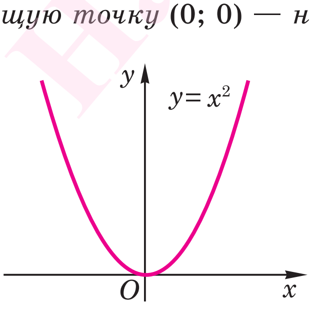


Рис. 146

5. *Нулем функции является значение $x = 0$.*

6. *Все точки параболы, кроме начала координат, лежат над осью абсцисс, значит,* $(-\infty;\ 0)$ *и* $(0;\ +\infty)$ — *промежутки знакопостоянства.*

7. *На промежутке* $[0;\ +\infty)$ *функция возрастает. На промежутке* $(-\infty;\ 0]$ *функция убывает.*

Функция $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ (см. п. 1.7).

Функция $\boldsymbol{y = x^3}$ (см. п. 1.8).

Функция $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$ (k — число, $k \neq 0$) (см. п. 1.9).

Квадратичной функцией называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c — числа, $a \neq 0$).

График квадратичной функции называется ***параболой***.

Графиком функции является парабола с осью симметрии $x = -\frac{b}{2a}$, вершиной в точке с координатами $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$ и ветвями, направленными вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$.

Свойства квадратичной функции $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ $\boldsymbol{(a \neq 0)}$

1. *Областью определения функции является множество всех действительных чисел* $\boldsymbol{R}$.

2. *Если* $a > 0$, *то множество значений функции — промежуток* $\left[\frac{4ac - b^2}{4a};\ +\infty\right)$. *Если* $a < 0$, *то множество значений функции — промежуток* $\left(-\infty;\ \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$.

3. *Если* $a > 0$, *то при* $x = -\frac{b}{2a}$ *функция принимает свое наименьшее значение* $y_{\text{наим}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$. *Если* $a < 0$, *то при* $x = -\frac{b}{2a}$ *функция принимает свое наибольшее значение* $y_{\text{наиб}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

4. *График функции имеет единственную точку пересечения с осью* Oy — $(0;\ c)$.

Если $D = b^2 - 4ac > 0$, *то ось* Ox *парабола пересекает в двух точках* $\left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a};\ 0\right)$ *и* $\left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a};\ 0\right)$. *Если* $D = 0$, *то точка* $\left(\frac{-b}{2a};\ 0\right)$ — *единственная точка пересечения с осью* Ox. *Если* $D < 0$, *то точек пересечения с осью* Ox *нет*.

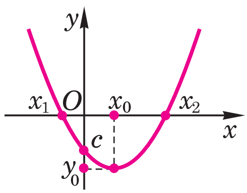
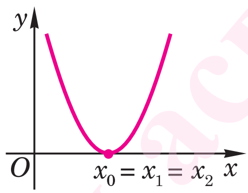
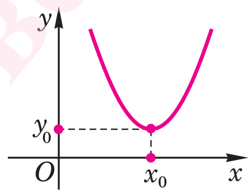
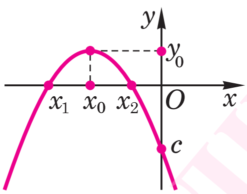
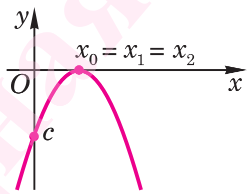
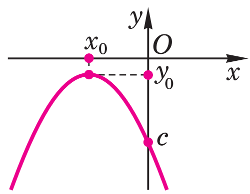
5. *При* $D > 0$ *нулями функции являются значения* $x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; *при* $D = 0$ *нулем функции является значение* $x = \frac{-b}{2a}$; *при* $D < 0$ *функция не имеет нулей*.

6. *Если $D \geqslant 0$, то промежутки $(-\infty;\ x_1)$, $(x_1;\ x_2)$, $(x_2;\ +\infty)$ являются промежутками знакопостоянства.*

Если $D < 0$, то промежутком знакопостоянства является вся область определения $\boldsymbol{R}$.

7. *Если $a > 0$, то функция убывает на промежутке $\left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$.*

Если $a < 0$, то функция убывает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$ и возрастает на промежутке $\left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right]$.

a \ D	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Числовые последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии (см. гл. 4).

Упражнения для повторения арифметического и алгебраического материала курса математики 5—9-х классов

1. Алгебраические выражения

Найдите значение выражения **(1—9).**

1. 1) $\dfrac{\left(2\frac{7}{12}-3\frac{5}{8}\right)\left(3\frac{4}{9}-5\frac{1}{6}\right)}{5\frac{2}{3}-2\frac{3}{4}+1\frac{7}{18}}$; 2) $\dfrac{\left(5\frac{7}{24}-6\frac{3}{16}\right):\left(2\frac{8}{15}-3\frac{5}{9}\right)}{5\frac{1}{5}+\frac{7}{15}-5\frac{1}{23}}$.

2. 1) $\dfrac{2\frac{8}{9}-3\frac{11}{90}+4{,}6}{3\frac{1}{3}+1{,}5^{-1}}$; 2) $\dfrac{2\frac{2}{15}-3\frac{5}{9}+7\frac{5}{6}}{12\frac{19}{45}+2{,}5^{-1}}$.

3. 1) $\dfrac{12{,}2^2-24{,}4\cdot 2{,}2+2{,}2^2}{4{,}2^3+17{,}4\cdot 4{,}2^2+12{,}6\cdot 5{,}8^2+5{,}8^3}$;

2) $\dfrac{3{,}8^3-2{,}4\cdot 3{,}8^2+11{,}4\cdot 0{,}8^2-0{,}8^3}{2{,}4^2+1{,}2\cdot 2{,}4+0{,}6^2}$.

4. 1) $\dfrac{14{,}8-6\frac{11}{12}+12{,}75-7\frac{2}{15}}{10\frac{2}{3}-3\frac{11}{12}}+2\frac{2}{3}\cdot 3{,}75$;

2) $\dfrac{1{,}5625\cdot 3{,}2+16\frac{2}{3}-9:2{,}4}{17\frac{7}{12}-6\frac{1}{3}}+\dfrac{12\frac{2}{3}-61{,}5:6{,}75}{2\frac{2}{3}}$.

5. 1) $\dfrac{|2{,}7-3{,}58|\cdot 1{,}5^{-1}}{1\frac{2}{3}+4\frac{1}{5}}$; 2) $\dfrac{|3{,}92-9{,}68|\cdot 4{,}5}{\left(\frac{5}{12}\right)^{-2}\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-1}}$.

6. 1) $\dfrac{\left(\sqrt{2\frac{7}{9}}\right)^3+\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}\frac{5}{7}}{0{,}25^0-3^{-1}}$; 2) $\dfrac{\left(\sqrt{1\frac{32}{49}}\right)^{-1}+1{,}5^{-2}\cdot 0{,}5}{(2{,}75^0+0{,}125^{-1})^{-1}}$.

7. 1) $\dfrac{\sqrt{137^2-37^2}}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{261}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{259^2-135^2}}{\sqrt{62}\cdot\sqrt{197}}$.

8. 1) $\dfrac{9-4\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}+3+\sqrt{5}$; 2) $\dfrac{23+8\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}-3-\sqrt{7}$;

3) $\sqrt{83+18\sqrt{2}}-\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{21-8\sqrt{5}}+\sqrt{5}$;

5) $\sqrt{37-12\sqrt{7}}+5-2\sqrt{7}$; 6) $\sqrt{28+16\sqrt{3}}+3-2\sqrt{3}$.

9. 1) $(-1{,}4)^{-5}:\left(-\frac{5}{7}\right)^6$; 2) $\dfrac{(-1)^5(3^4+3^2)^2}{(-9)^3}$;

3) $2^2\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}4:\frac{1}{2^3}$; 4) $9\cdot 27^{-1}(3^2)^3:\left(\frac{1}{3^{-2}}:\frac{1}{81}\right)$.

Упростите выражение **(10—11)**.

10. 1) $\frac{2}{3}\sqrt{125}+\frac{4}{7}\sqrt{5}-5\sqrt{27}-\frac{5}{6}\sqrt{3}$;

2) $5\sqrt{32}-4\sqrt{50}+\frac{1}{3}\sqrt{18}-2\sqrt{7}+\frac{1}{3}\sqrt{63}$.

11. 1) $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2$; 2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$; 4) $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^2$.

12. Найдите значение выражения:

1) $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - 3\sqrt{\frac{3}{8}} + 4\sqrt{1,5}\right)2\sqrt{\frac{2}{3}}$;

2) $\left(\sqrt{0,75} + 3\sqrt{\frac{1}{27}} - \sqrt{6,75}\right)\sqrt{3}$.

13. Сравните значения выражений:

1) $2006^2 + 2003^2$ и $2004^2 + 2005^2$;
2) $2222^2 + 1111^2$ и $2221^2 + 1112^2$;

3) $4\sqrt{405}$ и $7\sqrt{125}$; 4) $5\sqrt{176}$ и $7\sqrt{99}$;

5) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ и $\sqrt{19}$; 6) $\sqrt{11} - \sqrt{10}$ и $\sqrt{6} - \sqrt{5}$.

Освободитесь от иррациональности в знаменателе **(14—15)**.

14. 1) $\frac{15}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{25}{\sqrt{10}}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{6}}$;

4) $\frac{25}{\sqrt{125}}$; 5) $\frac{4}{\sqrt{8}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$;

7) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$; 8) $\frac{\sqrt{5}+1}{3\sqrt{5}-4}$; 9) $\frac{a-81}{9-\sqrt{a}}$;

10) $\frac{m-n}{\sqrt{mn}-n}$, $n > 0$.

15. 1) $\frac{2}{2-\sqrt{2}}$; 2) $\frac{6}{3+\sqrt{3}}$; 3) $\frac{11}{4+3\sqrt{3}}$;

4) $\frac{12}{6-2\sqrt{6}}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+4\sqrt{2}}$; 6) $\frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{7}}{3\sqrt{5}-5\sqrt{7}}$;

7) $\frac{2}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$; 8) $\frac{4}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$; 9) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}$.

16. 1) Упростите выражение $\frac{1}{\sqrt{a^2+9-6a}}$ и найдите его значение при $a = -10$.

2) Упростите выражение $\frac{1}{\sqrt{16+a^2-8a}}$ и найдите его значение при $a = -2$.

Упростите выражение **(17—25)**.

17. 1) $\sqrt{\left(\sqrt{6}-6\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{6}\right)^2}$;

2) $\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{5}-5\right)^2}$.

18. 1) $\sqrt{6+6a^2+\sqrt{a^8+6a^4+9}}$;

2) $\sqrt{4+6a^2+\sqrt{a^8+10a^4+25}}$.

19. 1) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$; 2) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$; 3) $\sqrt{10-4\sqrt{6}}$;

4) $\sqrt{37-20\sqrt{3}}$; 5) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$; 6) $\sqrt{21-8\sqrt{5}}$.

20. 1) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}+\sqrt{11-4\sqrt{7}}$; 2) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}-\sqrt{15+6\sqrt{6}}$.

21. 1) $\left(\frac{8a^{-2}}{b^{-3}}\right)\left(\frac{b^{-2}}{16^{-3}}\right)^2$; 2) $\left(-\frac{9a^4}{2b^3}\right)^{-3}\left(\frac{4b^4}{27a^5}\right)^{-2}$.

22. 1) $\frac{(a^{-2}+b^{-2})b^3}{b^{-1}(a^2+b^2)^2}$; 2) $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}+\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{-2}$.

23. 1) $\frac{10}{4a^2-25b^2}-\frac{b}{5b^2-2ab}-\frac{5}{4a^2+10ab}$;

2) $\frac{2a+3b}{2a^2-3ab}+\frac{2a-3b}{2a^2+3ab}+\frac{16a}{9b^2-4a^2}$;

3) $\frac{8x^2-2x+6}{8x^3+1}-\frac{2x-1}{2x-4x^2-1}-\frac{3}{2x+1}$;

4) $\frac{y^2}{x^2+xy+y^2}+\frac{x}{x-y}+\frac{4x^2y-xy^2}{y^3-x^3}$.

24. 1) $\left(\frac{x^5+x^2y^3}{x^3+x^2y}-xy\right):(x-y)-x$;

2) $\left(\frac{x^5-x^2y^3+x^2y}{x^2y}-1\right)\left(1+\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)^{-1}$;

3) $\left(\frac{(x^2+y^2)^3+2x^6-y^6}{(x^2+y^2)^3-x^6+2y^6}\right)^4:\left(\frac{x}{y}\right)^{-6}\cdot\frac{y^3}{x^3}$;

4) $\left(\frac{x^3y^9+x^9y^3}{x^6+y^6}+\frac{1-x^6y^6}{x^3y^3}\right)\left(\frac{x^{12}-x^4}{x^4-1}-\frac{x^{12}+x^8}{x^4+1}\right)$.

25. 1) $\left(\frac{\sqrt{c}+1}{\sqrt{c}-1}-\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}+4\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{\frac{c}{4}}-\frac{1}{2\sqrt{c}}\right)$;

2) $\left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}+\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}}+\frac{\sqrt{4cd}}{c-d}\right)\left(\sqrt{c}-\frac{\sqrt{cd}+d}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}\right)$.

2. Уравнения и системы уравнений

Решите уравнение **(26—27)**.

26. 1) $1{,}8(15-15x)+(2{,}3x-11)=12{,}4-23{,}5x$;

2) $2{,}2(7x+14)-6(32{,}5x-91)=8(3{,}2x+174{,}7)$;

3) $2\frac{3}{5}:3\frac{2}{7}=\frac{21}{23}x:\frac{15}{26}$; 4) $13\frac{1}{2}:4\frac{2}{9}=2\frac{5}{38}:x$;

5) $\frac{5x-4}{7}+\frac{2x+26}{8}+\frac{3}{14}=0$; 6) $\frac{1-7x}{3}-\frac{x+2}{5}+10{,}2=0$.

27. 1) $||2x-3|+4|=8$; 2) $||3x+7|-12|=3$.

28. Верно ли, что 2 является корнем уравнения:

1) $x^2-3x+2=0$;
2) $x^2-3x+2+\sqrt{x-3}=0$;
3) $x^2-3x+2+\dfrac{1}{x-2}=0$;
4) $x^2+2-3x-\sqrt{2-x}=0$;
5) $\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=0$;
6) $(x^2-3x+2)^{x+2}=0$;
7) $(x^2+3x-2)^{x-2}=0$;
8) $(x^2-3x+2)^{x-2}=0$;
9) $x^2-3x+2=\dfrac{x-2}{\sqrt{2-x}}$;
10) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-3}=0$;
11) $\dfrac{(x-2)^3}{x-2}=(x-2)^2$;
12) $\left(\dfrac{x^{228}-5x^{2006}}{(x+3)^{17}}\right)^{x-2}=0$?

29. Верно ли, что 3 является корнем уравнения:

1) $x^2-x-6=0$;
2) $x^2-x-6+\sqrt{x-3}=0$;
3) $x^2-x-6+\dfrac{1}{x^2-9}=0$;
4) $x^2-6-x-\sqrt{1-x}=0$;
5) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}=0$;
6) $(x^2-x-6)^{x+3}=0$;
7) $(x-3)^{x^2-x-6}=0$;
8) $(x^2-x-6)^{x-3}=0$;
9) $x^2-x-6=\dfrac{3-x}{\sqrt{x-3}}$;
10) $\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{x-3}=0$;
11) $\dfrac{(x-3)^3}{x-3}=(x-3)^2$;
12) $\dfrac{x+2}{x+3}+\dfrac{4}{x^2-9}=\dfrac{1}{x}$?

Решите уравнение (**30—32**).

30. 1) $\dfrac{2x-3}{3x-1{,}7}=1$; 2) $\dfrac{5-3x}{-2x+2{,}3}=1$;

3) $\dfrac{2x-8}{3x+5}=-5$; 4) $\dfrac{6x+4}{5+2x}=2$.

31. 1) $x^2-4\sqrt{3}x+11=0$; 2) $x^2+2\sqrt{5}x-20=0$.

32. 1) $\dfrac{5x^2-3x}{2}=7x-6$; 2) $\dfrac{3x^2+8x}{5}=4x+3$.

33. 1) Один из корней уравнения $4x^2-px+21=0$ равен 0,5. Найдите второй корень уравнения и значение p.

2) Один из корней уравнения $px^2-53x-28=0$ равен 4. Найдите второй корень уравнения и значение p.

34. 1) Укажите значения x, при которых трехчлены $5x^2+28x+3$ и $6x^2+43x+27$ принимают противоположные значения.

2) Укажите значения x, при которых трехчлены $3x^2+x-5$ и $2x^2-10x+3$ принимают противоположные значения.

35. 1) Трехчлены $2x^2+px-15$ и $3x^2+2x+q$ имеют общий корень -5. Укажите значения x, отличные от -5, при которых оба трехчлена принимают противоположные значения.

2) Трехчлены x^2-x+p и $qx^2-8x-21$ имеют общий корень 3. Есть ли такие значения x, при которых значение первого трехчлена меньше значения второго на 21? Если да, то укажите эти значения x.

Решите уравнение **(36—39)**.

36. 1) $(x-2)^2+3(x-2)=40$; 2) $(2x+3)^2+7(2x+3)=8$.

37. 1) $x^4-13x^2+36=0$; 2) $x^4-25x^2+144=0$;

3) $4x^4+7x^2-2=0$; 4) $3x^4-4x^2+1=0$.

38. 1) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x^2-3x+2}=2$;

2) $\frac{3}{x-2}-\frac{5}{x+1}-\frac{15}{x^2-x-2}=\frac{1}{10}$;

3) $\frac{5}{2x-3}+\frac{6}{3x+4}-\frac{42{,}5}{6x^2-x-12}=1$;

4) $\frac{7}{x+5}+\frac{2}{x-3}-\frac{16}{2x+x^2-15}=4$.

39. 1) $\frac{3}{x+7}+\frac{12}{x-9}=\frac{3(5x+19)}{x^2-2x-63}$;

2) $\frac{5}{x^2-x-6}+\frac{8}{x^2-2x-3}=\frac{3}{x-3}$;

3) $\frac{5x+2}{x^2+x-2}+\frac{x+3}{x^2-4x+3}+\frac{2x-21}{x^2-x-6}=0$;

4) $\frac{x-1}{x^2+9x+20}+\frac{2x-5}{x^2+7x+12}+\frac{3(x+9)}{x^2+8x+15}=0$;

5) $\frac{9}{x^3+4x^2+x-6}+\frac{5}{x^2+2x-3}+\frac{3}{x^2+5x+6}=0$;

6) $\frac{7}{x^2-5x+6}+\frac{8}{x^2+5x+6}-\frac{160}{x^3-3x^2-4x+12}=0$.

40. 1) Найдите такие значения x, при которых разность дробей $\frac{2x+11}{12x-69}$ и $\frac{6x+10}{17-8x}$ равна 3.

2) Найдите такие значения x, при которых сумма дробей $\frac{5x-3}{2x+4}$ и $\frac{7x+8}{3x-16}$ равна 7.

Решите уравнение **(41—47)**.

41. 1) $\sqrt{x-2}(x^2+5x+6)=0$;

2) $(3x^2-13x-10)\sqrt{2x-6}=0$;

3) $\dfrac{x\sqrt{x+5}}{x^2+2x-15}=0$;

4) $\dfrac{(25-x^2)\sqrt{x^2+6x}}{3x^2+16x-12}=0$.

42. 1) $x-4\sqrt{x}+3=0$;

2) $x-3\sqrt{x}+2=0$;

3) $x-5\sqrt{x}+4=0$;

4) $x-17\sqrt{x}+66=0$;

5) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2}{x-1}=0$;

6) $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}=\dfrac{x}{x-4}+\dfrac{6}{\sqrt{x}+2}$;

7) $\dfrac{21}{x-4\sqrt{x}+10}-x+4\sqrt{x}=6$;

8) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}-\dfrac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-2}=-2{,}5$.

43. 1) $\sqrt{x+2}=x$;

2) $\sqrt{x+1}=x-5$;

3) $x+\sqrt{3x+7}=7$;

4) $x-\sqrt{15-3x}=-1$;

5) $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1}$;

6) $\sqrt{8-5x}=\sqrt{x^2-16}$;

7) $\sqrt{x-2}=\dfrac{x-1}{\sqrt{3x-5}}$;

8) $\dfrac{x+2}{\sqrt{3x+4}}=\sqrt{x+1}$.

44. 1) $\left|x^2-x-6\right|=0$;

2) $\left|x^2+6x-8\right|=8$;

3) $\left|x^2-2x+39\right|=24$;

4) $\left|x^2-x+34\right|=22$;

5) $\left|8x^2-4x+1\right|=\left|3x^2+9x-7\right|$;

6) $\left|4x^2-41x+150\right|=\left|-16x^2+29x+90\right|$.

45. 1) $x^2-5|x|+6=0$;

2) $x^2-|x|-72=0$;

3) $2x^2+7|x|+3=0$;

4) $-3x^2-13|x|+10=0$.

46*. 1) $25x^2+15x+4=2|10x+3|$;

2) $3x^2-4x-3=|3x-7|$;

3) $|(2+x)(3+x)|=-2-x$;

4) $|(x+1)(3x+7)|=3x+7$;

5) $\left|x^2-x+2\right|=x+5$;

6) $\left|x^2 - x + 3\right| = 6 - 3x$;

7) $\left|3x^2 - 8x + 9\right| = -3(x^2 + 13)$;

8) $\left|5x^2 - 13x + 6\right| = -6 - x^2$.

47. 1) $\left|x^2 - 5x + 4\right| = 5x - x^2 - 4$;

2) $\left|x^2 + 3x + 2\right| = 3x + x^2 + 2$.

Решите систему уравнений **(48—52).**

48. 1) $\begin{cases} 2(3x - 4y) = 7(5x + 3y) - 87, \\ 7x - 13y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5(4x + 9y) + 250 = 17(2x + 5y), \\ 3x + 2y = 1. \end{cases}$

49. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{2 - 3y}{3x + 2y} = -\dfrac{25}{36}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{3x + 17}, \\ \dfrac{2x - 1}{11} = \dfrac{3y + 4}{25}. \end{cases}$

50. 1) $\begin{cases} (x + 3y)(x - 2y) = 24, \\ \dfrac{x - 2y}{x + 3y} = 1{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (7x - 4y)(4x - 7y) = 6, \\ \dfrac{7x - 4y}{4x - 7y} = 1{,}5. \end{cases}$

51. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = -1, \\ x + 2y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - y^2 - xy = 29, \\ 2y - x = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 9, \\ y - 3x = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 4, \\ 5x - 7y = 10. \end{cases}$

52. 1) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 6 = 0, \\ x^2 - 2xy + y^2 - x + y - 6 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 7xy = 55, \\ 9xy + x + y = -55. \end{cases}$

53. 1) При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} 2x - ay = 5, \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$ имеет решение, удовлетворяющее неравенству $x - y < 3$?

2) При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} ax + 4y = 7, \\ 5x + 8y = 9 \end{cases}$ имеет решение, удовлетворяющее неравенству $2x + 3y > 4$?

54*. При каких значениях a уравнение:

1) $(x-a)(ax^2+6x+5a)=0$;
2) $(ax-1)(2x^2-x-a)=0$ имеет два корня?

55*. При каких значениях a уравнение:

1) $\sqrt{3x+a}=\sqrt{x^2-2ax+a}$;
2) $\sqrt{2x-a}=\sqrt{x^2+3ax-a}$ имеет два корня?

3. Неравенства и система неравенств

Решите неравенство **(56—59)**.

56. 1) $7(3x-17)-5(4+x)>5$;
2) $13(15-2x)-9(3x-23)<-22$;
3) $\frac{3(5x-8)}{7}+13\geqslant 1$;
4) $\frac{x-1}{7}+\frac{3x+1}{5}\leqslant 6$.

57. 1) $x^2-10x+21<0$; 2) $3x^2-14x+16\leqslant 0$;
3) $5x^2-6x+1\geqslant 0$; 4) $x^2-8x+16>0$;
5) $x^2-5x+16<0$; 6) $x^2+12x+21<0$.

58. 1) $(x+8)(x-1{,}5)<0$; 2) $(15-2x)(x+6)>0$;
3) $(x^3-64)(-x^2-1)\geqslant 0$; 4) $x^2(x-7)(x+2)\leqslant 0$;
5) $\frac{(x-1)(x-2)(x+2)^3x^2}{(x-1)(x+1)(x-3)^4}\geqslant 0$; 6)* $\frac{x^3-x^2-5x-3}{x^2+3x+2}\geqslant 0$.

59. 1) $\frac{12-x}{x+14}>0$; 2) $\frac{10-6x}{2x-0{,}5}\leqslant 0$; 3) $\frac{x^2-6x}{x^2+6x+9}\leqslant 0$;
4) $\frac{x^2+9x+20}{x+4}>0$; 5) $\frac{x^2-3}{x^2-1}\geqslant 0$; 6) $\frac{2x^2+16x-3}{x^2+8x}>2$.

60. Найдите естественную область определения выражения:

1) $\sqrt{(x+8)(5-x)}$; 2) $\sqrt{(x+10)(x-2)(x-4)}$;
3) $\sqrt{x-\frac{15}{x+2}}$; 4) $\sqrt{x^3-x}$;
5) $\sqrt{x+4+\frac{3}{x}}$; 6) $\sqrt{-\frac{2x}{3-x}}$;
7) $\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-6x+5}$; 8) $\frac{1}{x+5}-\sqrt{x+5}$;
9) $\sqrt{\frac{x^4+x^2+3}{-x^2+x+2}}$; 10) $\sqrt{\frac{-x^2-2x+3}{x^4-x^2+2}}$.

Решите неравенство **(61—66)**.

61. 1) $\left(\frac{5x+26}{4x^2-25}-\frac{1}{2x-5}\right)\frac{25+10x}{3x+12}+\frac{2x}{5-2x}\geqslant 0;$

2) $\left(\frac{2x+1}{9x^2-16}+\frac{1}{3x+4}\right):\frac{5x-3}{16-12x}-\frac{3x}{3x+4}\leqslant 0;$

3) $\frac{x}{3x+2}-\frac{3x^2}{9x^2-6x+4}-4\cdot\frac{x-24}{27x^3+8}<0;$

4) $\frac{5x}{2x-3}-\frac{10x^2}{4x^2+6x+9}-\frac{59x^2+250}{8x^3-27}>0.$

62. 1) $\frac{(x+2)^3(x-4)^2}{(x+5)^7(x-2)^5}>0;$ 2) $\frac{(x+7)^{11}(x+9)^{12}}{(x-6)^{24}(x-8)^{25}}<0;$

3) $\frac{(x-1{,}2)^8(3-x)^5}{(x-1{,}5)^{11}(x+3{,}6)^{13}}\leqslant 0;$ 4) $\frac{(x+9)^{17}(2+4x)^6}{(3x+9)^3(6-4x)^2}\geqslant 0.$

63. 1) $|x+8|>4;$ 2) $|2x-6|<10;$

3) $|4-2x|\leqslant 8;$ 4) $|9+3x|\geqslant 1;$

5) $|5x+2{,}4|>-2;$ 6) $|8-3x|<-4.$

64. 1) $\sqrt{4x^2+9-12x}<4;$ 2) $\sqrt{9x^2+4+12x}>5;$

3) $\sqrt{25x^2+10x+1}\geqslant 4;$ 4) $\sqrt{4+49x^2-28x}\leqslant 9.$

65. 1) $\sqrt{x-2}>3;$ 2) $\sqrt{x+4}<7;$

3) $\sqrt{5-2x}>4;$ 4) $\sqrt{2-6x}<5;$

5) $\sqrt{4x-12}>-9;$ 6) $\sqrt{3x+9}<-2.$

66. 1) $\sqrt{x+15}\,(5-x)\leqslant 0;$ 2) $(x+2)\sqrt{14-5x}\geqslant 0;$

3) $\sqrt{x^2+2x-8}\,(12-2x)>0;$

4) $\sqrt{x^2-10x+16}\,(2x+4)<0;$

5) $\sqrt{\frac{x+4}{5x-8}}\cdot\sqrt{2x-1}\geqslant 0;$

6) $\sqrt{\frac{x+5}{x+2}}\cdot\sqrt{3x-1}\geqslant 0.$

67. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases}|x|\geqslant 1,\\|x-1|<3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}|x-3|\geqslant 4,\\|x|\leqslant 2;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}|2-x|\leqslant 3,\\|x+1|>1.\end{cases}$

68*. Решите систему неравенств относительно x:

1) $\begin{cases} x < 2, \\ x > a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 < 9, \\ x \geqslant a; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - 25 \geqslant 0, \\ x < a. \end{cases}$

69. Решите двойное неравенство:

1) $1 < \dfrac{1+x}{1-x} \leqslant 2;$ 2) $-2 \leqslant \dfrac{3-x}{x+2} < 1;$

3) $x < x^2 + 20 \leqslant 9x;$ 4) $0 < x^2 + 6x \leqslant 7.$

70. Найдите естественную область определения выражения:

1) $\dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{3x-6}};$ 2) $\dfrac{2}{\sqrt{4-x}} + \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}};$

3) $\sqrt{9-x^2} + \sqrt{\dfrac{x}{x-2}};$ 4) $\sqrt{x^2-5x-14} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}};$

5) $\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{3-x}+7\right);$

6) $\sqrt{2-|x-5|} + \dfrac{1}{\sqrt{|x-6|-1}-1}.$

71. Докажите, что:

1) если $a+b=4$, то $a^2-2b \geqslant -9;$

2) если $a-b=4$, то $a^2+b^2 \geqslant 8.$

72. Докажите неравенство:

1) $a^2+b^2 \geqslant \dfrac{(a+b)^2}{2};$ 2) $\dfrac{2}{(a+b)^2} \geqslant \dfrac{1}{a^2+b^2};$

3) $a^2+b^2 \geqslant 2ab;$ 4) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \leqslant 2(a+b).$

4. Функции

73. Задайте формулой линейную функцию, график которой:

1) параллелен графику функции $y=-2x+17$ и проходит через точку с координатами $(-5; 11)$;

2) симметричен графику функции $y=5x-8$ относительно начала координат.

74. 1) Функция задана формулой $y=2x-3$. Есть ли на графике функции точка, абсцисса которой равна утроенной ординате? Если да, то определите координаты этой точки.

2) Функция задана формулой $y=5x+4$. Есть ли на графике функции точка, абсцисса которой на 2 больше ее ординаты? Если да, то определите координаты этой точки.

75. Укажите координаты точек, в которых прямая $y = \frac{4}{3}x$ пересекает окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным:

1) 5; 2) 4.

76. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции, заданной формулой:

1) $y = 2x - 4$ на промежутке [3; 6];
2) $y = -3x + 4$ на промежутке [–8; –5].

77. 1) Задайте формулой функцию, график которой симметричен графику функции $y = 3x + 5$ относительно оси Ox.
2) Задайте формулой функцию, график которой симметричен графику функции $y = -5x + 10$ относительно оси Oy.

78. 1) Функция задана формулой $y = 3x - 4$. Как изменится значение y, если значение x увеличится на 2?

2) Функция задана формулой $y = -9x + 8$. Как изменится значение y, если значение x увеличится на 3?

79. 1) График функции $y = kx - 4$ проходит через точку $A(2; 21)$. Составьте уравнение линейной функции, график которой проходит через точку $B(-3; 5)$ и параллелен графику данной функции.

2) График функции $y = kx + b$ проходит через точки $M(1; -5)$ и $N(4; 1)$. Составьте уравнение линейной функции, график которой проходит через точку $K(1; 7)$ и параллелен графику данной функции.

80. 1) График функции $y = kx - 4$ проходит через точку $A(1; 1)$ и пересекает график функции $y = 2x + b$ в точке, абсцисса которой равна 3. Найдите число b.
2) График функции $y = -7x + b$ проходит через точку $C(-1; 15)$ и пересекает график функции $y = kx - 2$ в точке, ордината которой равна 1. Найдите коэффициент k.

81. 1) При каком значении x функция $y = x^2 - 2x - 1$ принимает наименьшее значение?

2) При каком значении x функция $y = 4x - 4x^2 - 1$ принимает наибольшее значение?

82. 1) График линейной функции $y = kx + 11$ проходит через вершину параболы $y = 3x^2 - 18x + 5$. Найдите коэффициент k.

2) График линейной функции $y = 7x + b$ проходит через вершину параболы $y = -5x^2 + 20x - 19$. Найдите число b.

83. 1) Наименьшее значение квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, равное 1, достигается при $x = 2$. Найдите числа a, b, c, если график функции проходит через точку $P(3; 3)$.

2) Наибольшее значение квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, равное 17, достигается при $x = 2$. Найдите числа a, b, c, если график функции проходит через точку $T(3; 14)$.

84. Найдите координаты точек пересечения:

1) параболы $y = x^2 + 4$ и прямой $x + y = 6$;

2) окружности $x^2 + y^2 = 36$ и параболы $y = x^2 + 6$.

Изобразите график функции **(85—93)**.

85. 1) $y = \frac{x}{5}$; 2) $y = \frac{x}{3} + 7$;

3) $y = -4x - 9$; 4) $x + y = 10$;

5) $y = 7(3 - x) + 3(x - 5)$; 6) $y = \frac{1}{3}(1 - 3x) + \frac{2}{3}(6x + 1)$.

86. 1) $y = \frac{8}{x}$; 2) $y = -\frac{4}{x}$; 3) $y = \frac{6}{x + 1}$;

4) $y = \frac{6}{3 - x}$; 5) $xy = -9$; 6) $y = \frac{12 - 3x}{x}$.

87. 1) $y = x^3$; 2) $y = -x^3$;

3) $y = x^3 + 6$; 4) $y = 4 - (x + 1)^3$;

5) $y = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$; 6) $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

88. 1) $y = x^2$; 2) $y = -x^2$;

3) $y = -0{,}3(x + 2)^2$; 4) $y = 7(x - 4)^2$;

5) $y = 2(x + 1)^2 - 3$; 6) $y = -5(x - 2)^2 + 1$.

89. 1) $y = -x^2 - 5x + 6$; 2) $y = x^2 - 4x + 5$;

3) $y = x^2 + 2x + 3$; 4) $y = -x^2 - x + 2$;

5) $y = (x + 4)^2 - 2(x + 1)^2$; 6) $y = (x - 1)^2 + (2x - 1)^2$.

90. 1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{-x}$;

3) $y = -\sqrt{x}$; 4) $y = \sqrt{2x - 3}$;

5) $y = \sqrt{7 - 2x}$; 6) $y = 3\sqrt{x + 1} - 2$.

91. 1) $y = |x|$; 2) $y = -|x|$;

3) $y = |x - 3| - 1$; 4) $y = |x + 1| - 2$;

5) $y = -|x + 2|$; 6) $y = 2 - |x - 1|$.

92. 1) $y = \frac{1}{x^2}$;

2) $y = \frac{1}{x^3}$;

3) $y = \frac{1}{x^2} + 2$;

4) $y = \frac{1}{(x-1)^2} - 1$;

5) $y = \frac{1}{(x+3)^3}$;

6) $y = \frac{1}{(x+1)^3} - 2$.

93. 1) $y = \sqrt{x}$;

2) $y = 2 - \sqrt{x}$;

3) $y = 1 + \sqrt{x-1}$;

4) $y = \sqrt{x+3}$;

5) $y = 2 + \sqrt{x+1}$;

6) $y = 1 - \sqrt{x-2}$.

На координатной плоскости изобразите множество точек, заданных уравнением **(94—95)**.

94. 1) $x^2 + (y-2)^2 = 4$;

2) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$.

95. 1) $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 0$;

2) $(x-3)(y+5) = 0$.

96. Решите систему уравнений, используя изображения графиков соответствующих функций:

1) $\begin{cases} y = \frac{1}{x}, \\ y = x^3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 - 7, \\ y = \frac{1}{x}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = 2 - \frac{x}{3}, \\ y + \frac{4}{x} = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2y - x + 1 = 0, \\ y = x^2 + 2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} y = x^3, \\ xy = 5; \end{cases}$

6) $\begin{cases} y - 3x + 4 = 0, \\ y = -x^2 + 2. \end{cases}$

97. Докажите, что график функции симметричен относительно оси Oy:

1) $y = (x-3)^4 + x^2 + (x+3)^4$;

2) $y = |x-4| + |x| + |x+4|$.

5. Текстовые задачи

98. 1) Числитель несократимой дроби на 2 меньше знаменателя. Если знаменатель увеличить в 3 раза, а числитель — на 13, то сумма полученной дроби и данной будет равна дроби, обратной данной. Найдите данную дробь.

2) Знаменатель несократимой дроби на 3 меньше числителя. Если знаменатель увеличить в 7 раз, а числитель — на 26 и вычесть полученную дробь из данной дроби, то получится дробь, обратная данной. Найдите данную дробь.

99. 1) Числитель положительной дроби на 11 меньше знаменателя. Если числитель увеличить на 139, а знаменатель — на 29, то получится дробь, обратная данной. Найдите данную дробь.

2) Сумма числителя и знаменателя положительной дроби равна 17. Если числитель увеличить на 31, а знаменатель на 37, то получится дробь, обратная данной. Найдите данную дробь.

100. 1) В 9 А и 9 Б классах в два раза больше учеников, чем в 9 В. В 9 Б и 9 В классах в три раза больше учеников, чем в 9 А. В каком из трех классов наименьшее число учеников, а в каком — наибольшее?

2) Имеется три коробки — синяя, красная и белая — разной вместимости. Если удвоить объем синей коробки и утроить объем красной, то их общий объем превзошел бы объем белой коробки в 4 раза. А если объем синей коробки утроить и в пять раз увеличить объем белой коробки, то их общий объем в шесть раз превзойдет объем красной коробки. У какой коробки наименьший объем, а у какой — наибольший?

101. 1) В типографии тираж книги упаковывают в пачки. Если в каждую пачку укладывать на 4 книги больше, то пачек окажется на 300 меньше, а если число книг в пачке уменьшить на 4, то пачек станет на 500 больше. Сколько книг в одной пачке и какой тираж книги?

2) На хлебозаводе в коробки укладывают одно и то же число пирожных. Если в каждую коробку укладывать на 2 пирожных меньше, то коробок потребуется на 6 больше, а если в каждый набор класть на 2 пирожных больше, то число коробок уменьшится на 5. Сколько всего изготовлено пирожных и сколько пирожных в одном наборе?

102. 1) Коля старше Светы на один год. Произведение их возрастов равно 420, а сумма их возрастов на 5 меньше возраста Колиной мамы. Сколько ей лет?

2) Дачный участок Веры Павловны прямоугольной формы, причем полупериметр его равен 44 м, а площадь — 480 м^2. Каковы ширина и длина участка?

103. 1) Между двумя классами распределили 18 билетов на концерт. Сколько билетов получил каждый класс, если известно, что произведение этих чисел равно 72?

2) Степа для дневника наблюдений по географии записал температуру воздуха на улице в 6 ч и в 12 ч. Каковы могли быть показания термометра, если разность записанных чисел равна 3, а их произведение равно 54?

104. 1) Татьяна Владимировна заметила, что время, которое она потратила на дорогу из дома в гимназию и на обратную дорогу с посещением магазинов, выражается в часах двумя взаимно обратными числами. Определите эти числа, если известно, что на посещение магазинов ушло 50 мин.

2) Папа Валера заметил, что количество прополотых на даче грядок сыном Игорем и дочкой Яной выражается взаимно обратными числами. По скольку грядок прополол каждый из детей, если число прополотых ими грядок равно $\frac{17}{4}$?

105. 1) Одноклассники Тима, Люба, Юля и Эдик живут в четырех соседних квартирах, номера которых — последовательные числа. Номер квартиры Тимы — самый маленький, а Эдика — самый большой. Если произведение номеров квартир мальчиков сложить с произведением номеров квартир девочек, то получится 142. Найдите номера квартир одноклассников.

2) После взвешивания дорожных сумок Кати, Оли, Маши и Наташи оказалось, что массы их сумок выражаются соответственно четырьмя последовательными натуральными числами, расположенными в порядке возрастания. Если перемножить наименьшее и наибольшее числа и из произведения вычесть сумму двух других, то получится 129. Какова масса дорожной сумки Наташи?

106. 1) Федор Григорьевич и Александр Арсенович решили выяснить возраст друг друга. Александр Арсенович сказал, что в двузначном числе его возраста цифра десятков на 5 больше цифры единиц, а произведение цифр числа на 58 меньше самого числа. Федор Григорьевич про свой возраст сообщил те же самые данные, хотя он старше Александра Арсеновича. Сколько лет каждому из них?

2) В двузначном числе, выражающем возраст бабушки Лидии Васильевны, десятков на 3 меньше, чем единиц, а произведение цифр числа на 15 меньше самого числа. Найдите возраст внучки Ирины, если известно, что и число, выражающее ее возраст, имеет такие же особенности.

107. 1) Сумма квадратов цифр двузначного числа серий нового бразильского телесериала на 19 меньше самого числа. Найдите число серий, если в этом числе десятков на 2 больше, чем единиц.

2) Число фотографий студентки Даши, которые хранит бабушка Лидия Андреевна, двузначное. В этом числе десятков на 5 меньше, чем единиц. Если к числу прибавить сумму квадратов его цифр, то получится 80. Сколько Дашиных фотографий у бабушки Лидии Андреевны?

108. 1) На сколько процентов увеличится объем куба, если длину ребра увеличить на 10 %?

2) На сколько процентов уменьшится объем куба, если длину ребра уменьшить на 10 %?

109. 1) Спонсоры выделили деньги школе на покупку компьютеров. Цены на компьютеры снизились на 10 %. На сколько процентов больше компьютеров может купить школа на выделенные деньги?

2) На пути от станции Дадаяны до деревни Арсеново Саша увеличил скорость движения на велосипеде на 20 %. Сколько процентов времени сэкономил Саша на прохождение этого пути?

110. 1) Числитель положительной дроби увеличили на 20 %. На сколько процентов надо уменьшить знаменатель, чтобы полученная дробь была в два раза больше исходной?

2) Числитель положительной дроби уменьшили на 15 %. На сколько процентов надо увеличить знаменатель, чтобы полученная дробь была вдвое меньше исходной?

111. 1) В саду было 120 деревьев. Через два года в саду стало 195 деревьев. Процентное увеличение числа деревьев за второй год превзошло на 5 % увеличение за первый год. На сколько процентов увеличилось число деревьев за первый год?

2) В автобусном парке было 25 машин. Их число уменьшилось на p %, а затем увеличилось на $(p + 30)$ %, после чего в парке стало 30 машин. Найдите p.

112. 1) Количество учеников в классе увеличилось на столько процентов, сколько было учеников в классе. После этого в классе стало на 4 ученика больше. Сколько учеников было в классе первоначально?

2) На одной книжной полке было на 10 книг больше, чем на другой. Число книг на каждой полке увеличили на столько процентов, сколько книг было на этой полке. После этого число книг на обеих полках составило 171. Сколько книг было на обеих полках?

113. 1) Степа каждый месяц на одну и ту же сумму покупает несколько одинаковых дисков для работы на компьютере. В марте он увеличил сумму на приобретение дисков на 20 %. На сколько процентов должна быть ниже цена одного диска, чтобы на новую сумму Степе удалось купить в два раза больше дисков, чем раньше?

2) Дренажные трубки* заменили на другие, сечение которых на 20 % меньше. На сколько процентов надо увеличить количество трубок, чтобы пропускная способность системы увеличилась в 2 раза?

114. 1) Введение новой железнодорожной ветки уменьшило путь между станциями Суворово и Таранки на 12 % и позволило увеличить скорость движения поездов на 10 %. Сколько процентов составила экономия времени на этом участке пути?

2) Введение в эксплуатацию моста через реку Амелька сократило путь между селами Иваничи и Федосово на 22 %, а ремонт покрытия дороги позволил увеличить скорость движения автомобилей на 7 %. Сколько процентов составила экономия времени при движении автомобиля между селами Иваничи и Федосово?

115. 1) После снижения цены на очистительные фильтры для воды число покупателей увеличилось на 10 %, а после улучшения качества фильтрующего элемента — еще на 20 %. Реклама фильтров для воды увеличила число покупателей еще на 25 %. На сколько процентов увеличилось число покупателей фильтров благодаря предпринятым мерам?

2) Новое покрытие дорожки для разбега позволило спортсмену Игорю увеличить дальность прыжка на 5 %, смена обуви позволила увеличить дальность прыжка

* Дренаж — система канав и подземных труб для сбора и отвода грунтовых вод с целью осушения почвы или понижения их уровня под основаниями сооружений.

еще на 4 %. Но из-за травмы Игорь уменьшил дальность прыжков на тренировке на 10 %. На сколько процентов и как изменилась дальность всех прыжков, выполненных в течение одной тренировки?

116. 1) Таня и Катя, одновременно выйдя из своих домов, отправились друг к другу в гости. Через 6 мин они прошли мимо друг друга по разным сторонам улицы. Сколько времени потратила на весь путь Катя, если Таня через 4 мин после «встречи» была около дома Кати?

2) Мотоциклист Федор преодолевает расстояние между деревней Проньки и поселком Рубежное за 3 ч, а мотоциклист Тимофей — за 2 ч. Федор и Тимофей выехали одновременно навстречу друг другу. За какое время после встречи каждый из них приедет в пункт назначения?

117. 1) Кружковцы Коля и Вадим, работая вместе, могут набрать на компьютере текст и сделать чертежи их общего научного реферата по алгебре на 3 ч быстрее, чем один Коля, и на 27 ч быстрее, чем Вадим. За какое время каждый из мальчиков один мог бы подготовить материалы к реферату на компьютере?

2) Лиза может выполнить все рисунки для издательства к рукописи учебника на 21 ч быстрее Лены, но на 4 ч дольше, чем работая вместе с Леной. За какое время могут подготовить все рисунки Лиза и Лена, работая по отдельности?

118. 1) Павел и Геннадий, работая вместе, могут выполнить все столярные работы при ремонте дома за 12 дней. Если бы Павел тратил на эту работу на 8 дней меньше, чем обычно, а Геннадий — на 9 дней больше, чем обычно, то и в этом случае, работая вместе, они справились бы с заданием за 12 дней. За сколько дней, работая в обычном темпе, может выполнить все столярные работы каждый из мастеров?

2) Наборщицы Галина и Елена, работая в обычном темпе, могут набрать главу рукописи за 20 ч. Если бы Елена смогла одна набрать такое количество страниц на 22 ч быстрее, а Галина — на 10 ч быстрее, то, работая вместе, они вдвое сократили бы время на набор этой главы. За сколько часов может набрать главу каждая из наборщиц в отдельности?

119. 1) Ко дну химического сосуда прикреплены две отводящие трубки с зажимами. Если со второй трубки снять зажим спустя 16 мин после того как сняли зажим с первой трубки, то весь раствор вытечет из сосуда за 21 мин после освобождения первой трубки. Если же с первой трубки снять зажим спустя 8 мин после снятия зажима со второй трубки, то весь раствор вытечет из сосуда за 20 мин после снятия зажима со второй трубки. За какое время вытечет раствор, если обе трубки освободить от зажимов одновременно?

2) В дне большого аквариума имеются два отверстия для спуска воды. Если второе отверстие открыть через 6 мин после того, как открыли первое, то вся вода из аквариума вытечет через 6 мин после открытия второго отверстия. Если открыть второе отверстие спустя 9 мин после открытия первого, то вся вода вытечет через 4 мин после открытия второго отверстия. За какое время вытечет вся вода из аквариума, если оба отверстия открыть одновременно?

120. 1) Между поселками Бурыгино и Стулово курсируют два автобуса. Оба автобуса выехали из поселков одновременно и встретились через 1,5 ч после выезда. Если после встречи автобус, выехавший из Стулово, увеличит скорость на 25 $\frac{км}{ч}$, а автобус, выехавший из Бурыгино, увеличит скорость на 15 $\frac{км}{ч}$, то автобусы придут в пункты назначения одновременно. Найдите скорости, с которыми выезжали автобусы, если расстояние между поселками 120 км.

2) Со станций Грицкевичи и Надежино, расстояние между которыми 190 км, одновременно выехали навстречу друг другу Вася на автомобиле и Валера на мотоцикле. Они встретились через 2 ч. После встречи Валера увеличил скорость на 5 $\frac{км}{ч}$, а Вася — на 10 $\frac{км}{ч}$. Вася прибыл в Надежино на полчаса раньше, чем Валера в Грицкевичи. Найдите первоначальные скорости движения мотоцикла и автомобиля.

121. 1) Расстояние между поселками Седичи и Отрадное по реке равно 66 км. Два катера одновременно отправляются из этих поселков навстречу друг другу и встречаются через 1,5 ч. Разность собственных скоростей катеров равна 12 $\frac{км}{ч}$. Катер с меньшей собственной скоростью плыл по течению и прибыл в пункт назначения через 33 мин после встречи катеров. Найдите собственные скорости катеров и скорость течения реки.

2) Расстояние между поселками Шахновичи и Дашкевичи по реке равно 63 км. Навстречу друг другу из этих поселков отошли два катера, разность собственных скоростей которых равна 5 $\frac{км}{ч}$. Один из них пройдет путь до Дашкевичей за 2 ч 15 мин, а другой — до Шахновичей за 2 ч 20 мин. Найдите собственные скорости катеров и скорость течения реки, которая превышает 2,5 $\frac{км}{ч}$.

122. 1) От станции Филимоново к станции Витьки с интервалом в 3 ч вышли пассажирский и скорый поезда. Скорый поезд догнал пассажирский, пройдя 560 км, и через 2 ч после обгона прибыл в Витьки, а пассажирскому поезду в момент прибытия скорого оставалось ехать еще 48 км. Найдите скорости движения поездов и расстояние от Филимоново до Витьков.

2) Нина вышла из деревни Кондратьево в поселок Нелино. Когда она прошла 1 км, вслед за ней вышел Слава, который догнал Нину за 1 ч в 3 км от Нелино. Слава пришел в Нелино на 6 мин раньше Нины. Найдите скорости пешеходов и расстояние, которое они прошли.

123. 1) Один из автомобилей проходит 5 км на 1 мин быстрее, чем другой проходит 6 км. Найдите скорости автомобилей, если один из них преодолевает 450 км на 15 мин быстрее другого.

2) Один из велосипедистов проезжает 450 м на 39 с дольше, чем другой проезжает 400 м. Найдите скорости велосипедистов, если второй проезжает 10 км на 10 мин быстрее первого.

124. 1) Из Минска в Москву, расстояние между которыми 700 км, выехал автобус, а через 2 ч по тому же маршруту выехал легковой автомобиль, скорость которого на 25 $\frac{км}{ч}$ больше скорости автобуса. Автомобиль прибыл в Москву через 1 ч после того, как догнал автобус. Найдите скорости автобуса и автомобиля.

2) От деревни Подошевки до станции Скубенково 50 км. Из деревни Подошевки на станцию Скубенково выехал велосипедист Саша и двигался со скоростью 14 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Спустя некоторое время вслед за ним по тому же маршруту выехал мотоциклист Валера. Двигаясь со скоростью 50 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, он приехал на станцию Скубенково через 25 мин после того, как догнал Сашу. На сколько позже Саши выехал Валера?

125. 1) Если из деревни Бадытчики, расположенной около шоссе, выедут одновременно два автомобиля, то в случае их движения в разных направлениях через 2 ч расстояние между ними будет на 240 км больше, чем было бы, если бы они поехали в одном направлении. Найдите скорости автомобилей, если скорость одного из них на $33\frac{1}{3}$ % больше скорости другого.

2) Из пунктов A и B, расположенных на прямолинейном участке шоссе, одновременно выезжают два автомобиля. Если они поедут в направлении от A к B, то через 2 ч расстояние между ними будет на 96 км больше, чем было бы в случае их движения в направлении от B к A. Найдите скорости автомобилей, если скорость одного на 40 % больше скорости другого.

126. 1) Расстояние между станциями Губино и Касперки по железной дороге 90 км, а по грунтовой дороге — 125 км. Со станции Губино поезд выходит на 1 ч позже рейсового автобуса и прибывает в Касперки на 30 мин раньше его. Найдите среднюю скорость поезда, если известно, что она на 40 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше средней скорости автобуса.

2) Расстояние между деревнями Казаково и Смоляки 52 км по насыпной дороге и 64 км по реке. Автобус из деревни Казаково вышел на 4 ч позже, чем оттуда отправился на лодке инспектор рыбнадзора. Найдите среднюю скорость движения лодки по реке, если известно, что средняя скорость автобуса на 40 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше и он прибыл в Смоляки на 20 мин раньше лодки.

127. 1) От станции Алейники до поселка Шустиково 10 % пути идет по заболоченной местности, 87 км — лесом, а

остальная часть дороги проходит через пахотные земли и относится к длине пути по заболоченным местам как 7 : 4. Какое расстояние от Алейников до Шустиково?
2) На пути от станции Волково до поселка Анищево 10 % железнодорожного полотна проложено вдоль озера, 209 км — через лес, а остальная часть дороги, проходящая через поля, относится к длине пути вдоль озера как 7 : 2. Какое расстояние между Волково и Анищево?

128. 1) Лодка плывет с постоянной скоростью 8 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ от деревни Гончаренки до деревни Доморады по озеру, а от Доморад до деревни Сырица — по реке и затем отправляется обратно. От Гончаренок до Сырицы лодка идет 7 ч 30 мин, а обратно — на 2 ч меньше, причем на путь от Доморад до Сырицы времени уходит вдвое больше, чем на путь от Доморад до Гончаренок. Найдите расстояние между деревнями Гончаренки и Сырица.
2) Лодка идет от пристани 5 км по озеру, а затем по реке до деревни Якуново и сразу же возвращается обратно. Известно, что в оба конца лодка прошла 40 км и при этом на обратный путь потратила на 1 ч меньше. Найдите скорость течения реки, если известно, что средняя скорость движения лодки по озеру 8 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

129. 1) Из деревни Волма в поселок Солнечный, расстояние между которыми 120 км, одновременно выехали на мотоциклах Витя и Саша. Когда Витя проехал 70 км, Саше осталось проехать 36 км. Сколько километров останется проехать одному из мотоциклистов, когда другой приедет в поселок?
2) Из города Минска в деревню Рудню одновременно выехали на автомобилях Егор и Миша. Когда Егор проехал 25 км, Мише осталось проехать 80 км, а когда Егор проехал 75 км, Мише осталось проехать 40 км. Каково расстояние от Минска до Рудни?

130*. 1) Студенты Вася и Костя, отдыхающие в двух спортивных лагерях, договорились выйти одновременно навстречу друг другу и встретиться на тропинке, соединяющей два лагеря. Если Вася выйдет на 1 ч раньше, то встреча произойдет на 36 мин раньше, чем намечалось. Найдите скорости Васи и Кости, если скорость Васи на 2,5 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше скорости Кости.

2) Друзья Паша и Сережа, выехав на велосипедах навстречу друг другу в одно и то же время, встретились на станции. Если бы один из мальчиков выехал на 1 ч раньше, то встреча произошла бы в 7,2 км от станции. Найдите скорости мальчиков, зная, что они отличаются на 6 $\frac{км}{ч}$.

131. 1) Из Глубокого в Плещеницы, расстояние между которыми 100 км, велосипедист Игорь выехал на час раньше Валеры, который ехал на автомобиле. Когда Валера приехал в Плещеницы, Игорю осталось ехать до Плещениц 44 км. После 20-минутной стоянки в Плещеницах Валера выехал в Глубокое, и, когда он приехал, Игорю осталось проехать до Плещениц 4 км. Найдите скорости велосипедиста Игоря и автомобиля.

2) Из деревни Бобково в поселок Мазаники, расстояние между которыми 24 км, вышел турист Володя, а спустя 2 ч выехал на велосипеде Сергей. Когда Сергей приехал в Мазаники, Володя прошел 20 км. После 30-минутного отдыха Сергей поехал в Бобково и приехал через 1 ч 10 мин после того, как Володя пришел в Мазаники. Найдите скорости движения Володи и Сергея.

6. Арифметическая и геометрическая прогрессии

132. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму первых 11 членов этой прогрессии.

133. Первый и четвертый члены арифметической прогрессии соответственно равны 1,2 и 1,8. Найдите сумму первых десяти ее членов.

134. Найдите сумму всех четных двузначных положительных чисел.

135. Найдите значение выражения

$$7{,}5 + 9{,}8 + 12{,}1 + \ldots + 53{,}5.$$

136. Сумма трех последовательных членов арифметической прогрессии равна 111. Второе число больше первого в пять раз. Найдите первое число.

137. Первый член арифметической прогрессии равен 5, а разность этой прогрессии равна 4. Является ли число 100 091 членом данной прогрессии?

138. В арифметической прогрессии шестой член равен 11. Найдите сумму пятого, шестого и седьмого членов этой прогрессии.

139. При каких значениях a значения выражений $\frac{2}{a}$, $\frac{1}{a(1-a)}$, $\frac{2}{1-a}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

140. В арифметической прогрессии

$$a_2 + a_4 + a_6 = 18; \; a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 = -168.$$

Найдите первый член и разность прогрессии.

141. В арифметической прогрессии сумма третьего и девятого членов равна 6, а их произведение равно $\frac{135}{16}$. Найдите сумму первых пятнадцати членов прогрессии.

142. В геометрической прогрессии первый член равен 3, второй член равен 12, n-й член равен 3072. Найдите n.

143. В геометрической прогрессии разность первого и второго членов равна 35, а разность третьего и четвертого членов равна 560. Найдите первые четыре члена этой прогрессии.

144. Знаменатель геометрической прогрессии равен -2, сумма ее первых пяти членов равна 5,5. Найдите девятый член этой прогрессии.

145. Первый член геометрической прогрессии равен 150, четвертый член равен 1,2. Найдите пятый член прогрессии.

146. В геометрической прогрессии четвертый член равен 16, знаменатель равен $\sqrt{2}$. Найдите первый член этой прогрессии.

147. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, у которой сумма первого и третьего членов равна 40, а сумма второго и четвертого членов равна 80.

148. Знаменатель геометрической прогрессии равен 2, сумма первого и последнего членов равна 68, произведение второго и предпоследнего членов равно 256. Сколько членов в прогрессии?

149. В геометрической прогрессии первый член равен 1, а сумма первых пяти членов в 16 раз превосходит сумму обратных величин этих же членов. Найдите знаменатель прогрессии.

150. Частное от деления четвертого члена геометрической прогрессии на ее первый член равно 64, третий член прогрессии равен 8. Найдите первый член прогрессии.

151. Найдите три последовательных члена геометрической прогрессии, зная, что их сумма равна 62, а сумма их квадратов равна 2604.

152. Задайте формулой n-го члена арифметическую прогрессию, если известно, что сумма первых десяти членов равна 300, а первый, второй и пятый члены прогрессии являются последовательными членами геометрической прогрессии.

153. Все члены геометрической прогрессии различны. Первый, четвертый и пятый члены являются последовательными членами другой геометрической прогрессии. Найдите ее знаменатель.

154. Три положительных числа, сумма которых равна 12, являются последовательными членами арифметической прогрессии. Если к ним соответственно прибавить 1, 2, 6, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

155. Найдите третий член убывающей геометрической прогрессии, сумма первых трех членов которой равна 12,25, а второй член равен 3,5.

156*. Найдите отношение третьего члена убывающей геометрической прогрессии к ее пятнадцатому члену, зная, что сумма двенадцати членов этой прогрессии, начиная с тринадцатого, составляет 40 % суммы ее первых двенадцати членов.

157. 1) Бактерия делится пополам в течение суток. Пробирка окажется полной на 10-е сутки после помещения в нее одной бактерии. На какие сутки наполнится пробирка, если в нее поместить две бактерии?

2) Пруд полностью зарос ряской за 30 дней. На какой день ряской была покрыта половина пруда, если ежедневно площадь поверхности, покрываемой ряской, удваивалась?

158*. Пусть (b_n) — геометрическая прогрессия. Найдите значение выражения $125(S_5 - S_2)$, если $S_3 = 24{,}32$ и $b_4 = -\frac{864}{125}$.

159*. Решите уравнение $(x \in N)$

$$(3 + 6 + 9 + \ldots + 3(x-1)) + \left(4 + 5{,}5 + 7 + \ldots + \frac{8+3x}{2}\right) = 137.$$

160*. Решите уравнение $(x \in N)$

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \ldots + \frac{1}{x} = 3.$$

Справочные материалы

Квадраты и кубы натуральных чисел от 1 до 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Степени чисел 2, 3, 5

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049
5^n	5	25	125	625	3125	15 625				

Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 99

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

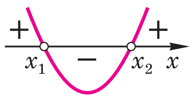
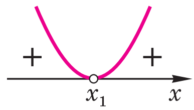
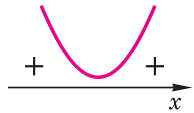
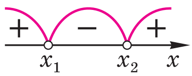
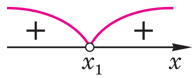
Таблица приближенных значений квадратных корней

$\sqrt{2} \approx 1{,}414$	$\sqrt{7} \approx 2{,}646$	$\sqrt{14} \approx 3{,}742$
$\sqrt{3} \approx 1{,}732$	$\sqrt{10} \approx 3{,}162$	$\sqrt{15} \approx 3{,}873$
$\sqrt{5} \approx 2{,}236$	$\sqrt{11} \approx 3{,}317$	$\sqrt{17} \approx 4{,}123$
$\sqrt{6} \approx 2{,}449$	$\sqrt{13} \approx 3{,}606$	$\sqrt{19} \approx 4{,}359$

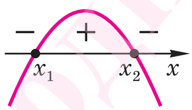
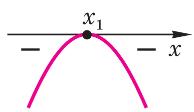
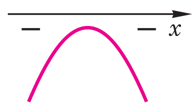
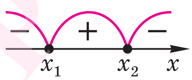
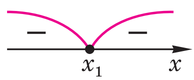
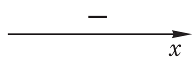
Обозначения некоторых числовых множеств

N — множество всех натуральных чисел
Z — множество всех целых чисел
Q — множество всех рациональных чисел
R — множество всех действительных чисел

Решение строгих квадратных неравенств вида $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$ при $a>0$

	$D>0,\ a>0$	$D=0,\ a>0$	$D<0,\ a<0$
Способ решения с использованием изображения параболы			
Способ решения методом интервалов			
Ответ для неравенства $ax^2+bx+c>0$	$x<x_1$ или $x>x_2$, т. е. $(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;\ +\infty)$	$x\neq x_1$, т. е. $(-\infty;\ x_1)\cup(x_1;\ +\infty)$	x — любое число, т. е. $\boldsymbol{R}$
Ответ для неравенства $ax^2+bx+c<0$	$x_1<x<x_2$, т. е. $(x_1;\ x_2)$	Нет решений, т. е. $\varnothing$	Нет решений, т. е. $\varnothing$

Решение нестрогих квадратных неравенств вида $ax^2+bx+c\geqslant 0$, $ax^2+bx+c\leqslant 0$ при $a<0$

	$D>0,\ a<0$	$D=0,\ a<0$	$D<0,\ a<0$
Способ решения с использованием изображения параболы			
Способ решения методом интервалов			
Ответ для неравенства $ax^2+bx+c\geqslant 0$	$x_1\leqslant x\leqslant x_2$, т. е. $[x_1;\ x_2]$	$x=x_1$, т. е. x_1	Нет решений, т. е. $\varnothing$
Ответ для неравенства $ax^2+bx+c\leqslant 0$	$x\leqslant x_1$ или $x\geqslant x_2$, т. е. $(-\infty;\ x_1]\cup[x_2;\ +\infty)$	x — любое число, т. е. $\boldsymbol{R}$	x — любое число, т. е. $\boldsymbol{R}$

ОТВЕТЫ

Глава 1. Функции

1.1. 1) Да; 3) да.
1.2. 2) 0; $-\frac{3}{5}$; $-\frac{7}{9}$; $-1\frac{6}{13}$; -3; -79; нет.
1.3. 1) 8.
1.4. 2) -6.
1.5. $\boldsymbol{R}$; 1) $y(5) < y(4)$; 3) $y\left(-\frac{1}{2}\right) > y\left(\frac{1}{2}\right)$.
1.6. $[-41; 39]$; 2) $y(5) < y(6)$; 4) $y(-6) < y(-5)$.
1.7. 1) 9; 3) 4; 5) нет.
1.8. 2) $y\left(-\frac{1}{3}\right) > y\left(\frac{1}{3}\right)$; 4) $y\left(\frac{1}{4}\right) > y(4)$.
1.9. 1) -30; 3) 0,125.
1.10. 2) $\pm\sqrt{510}$; 4) нет; 6) $\pm\sqrt{1230}$.
1.11. 1) $-3 < x < 3$; 3) $x \ne 0$.
1.12. 2) Да; 4) нет; 6) нет.
1.13. 1) $a < -3$.
1.14. 2) 2; 4) $1\frac{1}{6}$.
1.15. -18; -9; -36; -45; $\boldsymbol{R}$.
1.16. 2) 0; 4) $3\frac{5}{6}$; $\boldsymbol{R}$.
1.17. $y = 82 - x$; да; $\boldsymbol{R}$; $\boldsymbol{R}$.
1.18. $y = x + 20$; да; $\boldsymbol{R}$; $\boldsymbol{R}$.
1.19. $y = 40 - x$; да; $x \in [1; 39]$, $x \in \boldsymbol{N}$, $y \in [1; 39]$, $y \in \boldsymbol{N}$.
1.20. 1) $y = 4x - 4$; 3) $(2; +\infty)$; 4) 16 см; 36 см; 52 см; 60 см; 5) $(4; +\infty)$.
1.21. 1) $y = x^2$; 3) $(0; +\infty)$; 4) 121 см^2, 225 см^2, 289 см^2, 441 см^2; 5) $(0; +\infty)$.
1.22. 2) $\boldsymbol{R}$; 4) $x \ne -4$; 6) $x \ne 0$; $x \ne 3$; 8) $x \ne 1{,}2$; $x \ne 5$.
1.23. 1) $x \geqslant 1\frac{1}{3}$; 3) $x \leqslant 8$; 5) $\boldsymbol{R}$; 7) $\boldsymbol{R}$; 9) $x \leqslant -4$ и $x \geqslant 4$.
1.24. 2) 3; 4) $-\frac{1}{5}$.
1.25. 1) а) $x < 2$; б) $x > 2$; в) $x > 18$; г) $x < 4{,}8$; д) $x < -8$; е) $x > -8$.
1.26. 2) $k > 4$.
1.27. 1) $[0; +\infty)$; 0 — наименьшее значение, наибольшего значения нет; 3) $\left\{\frac{n^2}{3}\right\}$, $n \in \boldsymbol{N}$; $\frac{1}{3}$ — наименьшее значение, наибольшего значения нет; 5) $\left[0; 5\frac{1}{3}\right]$; 0 — наименьшее значение, $5\frac{1}{3}$ — наибольшее значение.
1.28. 2) 0,5; 1; 4) 0,75; 1.
1.29. $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$; 1) $-0{,}4$; 3) $-7\frac{1}{3}$; 5) $\frac{6a+4}{3-2a}$; 7) $\frac{4-6p}{2p+3}$.
1.30. $\boldsymbol{R}$; 2) да; 4) нет.
1.31. $\boldsymbol{R}$; 1) да; 3) да.

1.32. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 2) 0,25; 4) 1,5; 6) $\frac{6k-3}{9k-2}$; 8) $\frac{4b+3}{6b+2}$.
1.33. $a^2 + b^2 < (a+b)^2$.
1.34. 2) $x < \frac{5}{3}$.
1.35. $x \leqslant 3{,}5$.
1.36. $x < 0{,}8$.
1.37. 1) $[-6; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty)$; 3) $[0{,}5; +\infty)$.
1.38. 2) $\boldsymbol{R}$; 4) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; 6) $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$.
1.39. 1) $(-\infty; -3) \cup (-3; 0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty)$; 3) $\boldsymbol{R}$.
1.40. б) $y = x$; г) $y = -\frac{1}{2}x$; е) $y = -2x$.
1.41. а) $y = 2x + 2$; в) $y = -\frac{1}{2}x + 1$.
1.42. 2) $y = \frac{1}{4}x^2$, $[-2; 4]$; 4) $y = \frac{1}{2}x^2$, $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.
1.43. 1) 648 Н, 540 Н; 2) 70 кг, 40 кг, 50 кг; 3) $D = \{40, 50, 60, 70\}$, $E = \{432, 540, 648, 756\}$; 4) 756 Н, 432 Н.
1.44. 2) 3 мая, 6 мая, 8 мая, 12 мая; 4) 42 см, 19 см.
1.45. 1) 111 °C; 66 °C; 52 °C; 35 °C; 3) $D = \{0; 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70\}$, $E = \{20; 35; 42; 52; 66; 84; 111; 150\}$.
1.46. 2) 2 года; 6 лет; 8 лет; 4) 5,9 кг; 1 кг; 1,1 кг; 1,6 кг; 2,1 кг; 6) 20,5 кг; 3,3 кг.
1.47. 1) Да; $D = [21; 23{,}5]$; $E = [0; 11]$; 3) ≈ 4 мм; $\approx 9{,}6$ мм; $\approx 10{,}6$ мм; ≈ 11 мм; 5) $\approx 9{,}5$ мм; ≈ 1 мм.
1.48. 2) 10 ч 20 мин; 13 ч; 4) ≈ 50 мин; ≈ 60 мин; ≈ 80 мин.
1.51. 1) Нет; 3) нет; 5) да.
1.52. 2) Нет; 4) нет; 6) нет.
1.53. 1) 7; 4; 3; 2,5; 2,2; 2; $1\frac{6}{7}$; 1,75; $1\frac{2}{3}$; 1,6; 4) $[1{,}6; 7]$; 5) 1,6; 7.
1.54. 3) $[3; 3{,}4]$; 3; 3,4; 4) I.
1.56. 2) б) $D = [-2; 2]$; $E = [-8; 0]$; в) -8; 0; г) I, III, IV; д) да, $(0; -4)$, $(2; 0)$.
1.57. б) $D = [-1; 4]$; $E = [-6; -1]$; в) -6; -1; г) III, IV; д) да, $(0; -3)$.
1.58. 2) $\frac{2}{9}$; 0; 4) 1; 6) -1; $1\frac{2}{9}$.
1.64. 2) -33; 4) -32; 6) $-11\sqrt{3}$.
1.65. 1) Да; 3) да; 5) да.
1.66. 2) $k = 4$; $b = 36$; 4) $k = 4$; $b = -3{,}5$.
1.67. 1) $y = -3{,}5x$; 3) $y = -\frac{18}{17}x$.
1.68. Например: 2) $y = x^2 - 5$; 4) $y = x^2 + 8$.
1.69. 1) Да.
1.70. 2) $y = -2x^2$; 4) $y = x^2$.
1.71. 1) 8.
1.72. 2) $x = 4$ или $x = 6$; 4) $x = -3$.
1.76. 2) -3; 0; 4) -2; $-0{,}8$; 6) 0,2; 1.
1.77. 1) -1; 3; 3) -3; $-1{,}4$.
1.78. 2) $[-3; +\infty)$; наибольшего значения нет; -3 — наименьшее значение; 4) $(-\infty; 2]$; 2 — наибольшее значение; наименьшего значения нет; 6) $[0; +\infty)$; наибольшего значения нет; 0 — наименьшее значение; 8) $(-\infty; -3]$; -3 — наибольшее значение; наименьшего значения нет.
1.79. 1) $x = 4$; 3) $x = -2$; 5) $x = 1{,}5$; 7) $x = -0{,}5$; 9) $x = -0{,}25$.

1.81. 1) $1\frac{1}{3}$; 3) нет; 5) нет; 7) –7; 9) –3.

1.82. Рис. 20, а) [–1,5; 2]; б) –5; –3; –1; 1; 3; в) [–6; –5), (–5; –3), (–3; –1), (–1; 1), (1; 3), (3; 4,5]; г) 2; д) –1,5.

1.83. 1) –4; –2; 0.

1.84. 2) (–50; 0), (0; 25), (–∞; –50), (–50; +∞); 4) $\left(-\frac{10}{11};\ 0\right)$, (0; –1,1), $\left(-\infty;\ -\frac{10}{11}\right)$, $\left(-\frac{10}{11};\ +\infty\right)$.

1.85. 1) а) [–5; –3], [0; 3]; б) [–6; –5], [–3; 0], [3; 5].

1.86. 2) $y_1 < y_2$; 4) $y_1 < y_2$.

1.87. 1) а) $D = [-0,5;\ 2]$, $E = [-1;\ 2]$; б) 0,5; в) убывающая; 3) а) $D = [-1,5;\ 1,5]$, $E = [-1;\ 1,5]$; б) –1; в) возрастающая; 5) а) $D = [-1;\ 0]$, $E = [0;\ 2,5]$; б) 0; в) убывающая.

1.88. 2) $y_1 < y_2$; 4) $y_1 > y_2$.

1.89. 1) $y_1 > y_2$; 3) $y_1 > y_2$.

1.90. Нулей нет; –1,6 — наибольшее значение.

1.91. Нулей нет; 4,5 — наименьшее значение.

1.92. 0,5.

1.93. $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

1.94. 2) $a > -0,8$; 4) $a > 0$.

1.95. 1) $b < 0,25$; 3) $b < 0$.

1.96. 2) $a > 3$; 4) $a < -1$ и $a > 1$.

1.97. 1) $a < -2$; 3) $-4,5 < a < 0$ и $0 < a < 4,5$.

1.98. 2) Нет; 4) да; 6) да; 8) нет; 10) да.

1.99. 1) Нет; 3) да; 5) нет; 7) да; 9) да.

1.100. 2) $a < 0$.

1.101. 1) Нет; 3) да; 5) да; 7) нет.

1.102. 2) а) Да; б) нет; 4) а) нет; б) да; 6) а) нет; б) нет; 8) а) да; б) нет.

1.103. 1) а) [0; 5]; б) [–4; 0]; в) –3; 3; г) [–4; –3); (–3; 3); (3; 5].

1.104. 0,5; 2,5; 1; 1,5; 0; –1,5; 0; 1,5; **1)** [–2,5; 9,5]; **2)** [–1,5; 2,5]; **3)** 2,5; –1,5; **4)** (0; 1), (3; 0), (8; 0); **5)** 3; 8; **6)** [–2,5; 3), (3; 8), (8; 9,5]; **7)** [–2,5; –0,5], [0; 2], [5; 9] — промежутки возрастания; [–0,5; 0], [2; 5], [9; 9,5] — промежутки убывания.

1.105. 1) **1)** [–5; 6]; **2)** [0,5; 3,25]; **3)** 3,25; 0,5; **4)** (0; 2); **5)** нет; **6)** [–5; 6]; **7)** [–5; 6] — промежуток убывания, промежутков возрастания нет; 3) **1)** [–4; 9]; **2)** [–6; 7]; **3)** 7; –6; **4)** (0; 3), (3; 0); **5)** 3; **6)** [–4; 3), (3; 9]; **7)** [–4; 9] — промежуток убывания, промежутков возрастания нет.

1.106. 2) **1)** [–6; 6]; **2)** [–4; 4]; **3)** 4; –4; **4)** (–4; 0), (0; –1), (1; 0), (5; 0); **5)** –4; 1; 5; **6)** [–6; –4), (–4; 1), (1; 5), (5; 6]; **7)** [–1; 4] — промежуток возрастания, [–6; –1], [4; 6] — промежутки убывания.

1.107. 1) $y = x^2 + 3$; 3) $y = -x^2 + 4$.

1.108. 2) а) [–4; +∞); б) наибольшего значения нет; –4 — наименьшее значение; в) (–∞; 0]; г) [0; +∞); д) (0; –4); е) $x = 0$; ж) (–2; 0), (0; –4), (2; 0); з) (–∞; –2), (–2; 2), (2; +∞); 4) а) (–∞; –1]; б) –1 — наибольшее значение; наименьшего значения нет; в) [0; +∞); г) (–∞; 0]; д) (0; –1); е) $x = 0$; ж) (0; –1); з) (–∞; +∞).

1.109. 1) а) (–∞; –1]; б) [–1; +∞); в) нет; 3) а) (–∞; –2]; б) [–2; +∞); в) нет.

1.110. 2) –12; (–∞; –12), (–12; +∞); 4) $2\frac{2}{3}$; $\left(-\infty;\ 2\frac{2}{3}\right)$; $\left(2\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; 6) 2,5; (–∞; 2,5), (2,5; +∞); 8) 36; (–∞; 36), (36; +∞).

1.111. 1) **1)** ***R***; **2)** [1; +∞); **3)** наибольшего значения нет; 1 — наименьшее значение; **4)** (0; 5); **5)** нет; **6)** (–∞; +∞); **7)** [2; +∞) — промежуток возрастания; (–∞; 2) — промежуток убывания; 3) **1)** ***R***; **2)** [–2; +∞); **3)** наибольшего значения нет; –2 — наименьшее значение; **4)** (0; 4), (1; 0), (4; 0); **5)** 1; 4; **6)** (–∞; 1), (1; 4), (4; +∞); **7)** [2,5; +∞) — промежуток возрастания; (–∞; 2,5] — промежуток убывания.

1.112. 2) $y = -x^2 - 2x$; 4) $y = -x^2 + 6x - 8$.

1.113. 1) **1)** [–5; 6]; **2)** [–3; 2]; **3)** 2; –3; **4)** (–3; 0), (–1; 0), (1; 0), (3; 0); (0; 2); **5)** –3; –1; 1; 3; **6)** [–5; –3), (–3; –1), (–1; 1), (1; 3), (3; 6]; **7)** [–5; –3], [–2; 0], [2; 3] — промежутки возрастания; [–3; –2], [0; 2], [3; 6] — промежутки убывания; 3) **1)** [–3,5; 2]; **2)** [–1,5; 2]; **3)** 2; –1,5; **4)** (–3; 0), (–1; 0), (0; 0,5), (1,5; 0); **5)** –3; –1; 1,5; **6)** [–3,5; –3), (–3; –1); (–1; 1,5), (1,5; 2]; **7)** [–2,5; 1], [1,5; 2] — промежутки возрастания; [–3,5; –2,5], [1; 1,5] — промежутки убывания; 5) **1)** [–6; 4]; **2)** [–3; 4]; **3)** 4; –3; **4)** (–5; 0), (–2; 0), (0; –3), (2; 0), (≈3,5; 0); **5)** –5; –2; 2; ≈3,5; **6)** [–6; –5), (–5; –2), (–2; 2) (2; 3,5); (3,5; 4]; **7)** [–6; –4], [0; 3] — промежутки возрастания, [–4; 0], [3; 4] — промежутки убывания.

1.114. $y = 5x + 22$; **1)** ***R***; **2)** ***R***; **3)** нет; **4)** (–4,4; 0), (0; 22); **5)** –4,4; **6)** (–∞; –4,4), (–4,4; +∞); **7)** (–∞; +∞) — промежуток возрастания; промежутков убывания нет.

1.115. $y = -3x - 13$; **1)** ***R***; **2)** ***R***; **3)** нет; **4)** $\left(-4\frac{1}{3};\ 0\right)$; (0; –13); **5)** $-4\frac{1}{3}$; **6)** $\left(-\infty;\ -4\frac{1}{3}\right)$, $\left(-4\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; **7)** промежутков возрастания нет; (–∞; +∞) — промежуток убывания.

1.116. 2) **1)** ***R***; **2)** [0; +∞); **3)** наибольшего значения нет; 0 — наименьшее значение; **4)** (0; 1), (2; 0); **5)** 2; **6)** (–∞; 2), (2; +∞); **7)** [2; +∞) — промежуток возрастания; (–∞; 2] — промежуток убывания; 4) **1)** ***R***; **2)** (–∞; 0]; **3)** 0 — наибольшее значение; наименьшего значения нет; **4)** (0; –5), (1; 0); **5)** 1; **6)** (–∞; 1), (1; +∞); **7)** (–∞; 1] — промежуток возрастания; [1; +∞) — промежуток убывания.

1.117. 1) **1)** [–2; 3]; **2)** [0; 9]; **3)** 9; 0; **4)** (0; 0); **5)** 0; **6)** [–2; 0), (0; 3]; **7)** [0; 3] — промежуток возрастания; [–2; 0] — промежуток убывания; 3) **1)** [–4; –1]; **2)** [1; 16]; **3)** 16; 1; **4)** нет; **5)** нет; **6)** [–4; –1]; **7)** промежутков возрастания нет; [–4; –1] — промежуток убывания.

1.118. 2) **1)** ***R***; **2)** [–1; +∞); **3)** наибольшего значения нет; –1 — наименьшее значение; **4)** (0; 3), (1; 0), (3; 0); **5)** 1; 3; **6)** (–∞; 1), (1; 3), (3; +∞); **7)** [2; +∞) — промежуток возрастания; (–∞; 2] — промежуток убывания; 4) **1)** ***R***; **2)** (–∞; 6,125]; **3)** 6,125 — наибольшее значение; наименьшего значения нет; **4)** (–2,5; 0), (0; 5), (1; 0); **5)** –2,5; 1; **6)** (–∞; –2,5), (–2,5; 1), (1; +∞); **7)** (–∞; –0,75] — промежуток возрастания; [–0,75; +∞] — промежуток убывания; 6) **1)** ***R***; **2)** (–∞; –6]; **3)** –6 — наибольшее значение; наименьшего значения нет; **4)** (0; –6); **5)** нет; **6)** (–∞; +∞); **7)** (–∞; 0] — промежуток возрастания; [0; +∞) — промежуток убывания; 8) **1)** ***R***; **2)** [–4; +∞); **3)** наибольшего значения нет; –4 — наименьшее значение; **4)** (–1,5; 0), (0; –3), (0,5; 0); **5)** –1,5; 0,5; **6)** (–∞; –1,5), (–1,5; 0,5), (0,5; +∞); **7)** [–0,5; +∞) — промежуток возрастания; (–∞; –0,5] — промежуток убывания.

1.119. 1) **1)** $[-1; 2]$; **2)** $[0; 4]$; **3)** 4; 0; **4)** (0; 0); **5)** 0; **6)** $[-1; 0)$, $(0; 2]$; **7)** $[0; 2]$ — промежуток возрастания; $[-1; 0]$ — промежуток убывания; 3) **1)** $[0; 2]$; **2)** $[0; 4]$; **3)** 4; 0; **4)** (0; 0); **5)** 0; **6)** $(0; 2]$; **7)** $[0; 2]$ — промежуток возрастания; промежутков убывания нет; 5) **1)** $[-2; 0]$; **2)** $[0; 4]$; **3)** 4; 0; **4)** (0; 0); **5)** 0; **6)** $[-2; 0)$; **7)** промежутков возрастания нет; $[-2; 0]$ — промежуток убывания.

1.120. 2) **1)** $\boldsymbol{R}$; **2)** $[0; +\infty)$; **3)** наибольшего значения нет; 0 — наименьшее значение; **4)** (0; 0); **5)** 0; **6)** $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$; **7)** $[0; +\infty)$ — промежуток возрастания; $(-\infty; 0]$ — промежуток убывания; 4) см. ответы к 2).

1.122. $S = 6a^2$; $\sqrt{6}$ см, 4 см, 5 см, $\sqrt{5}$ м.

1.123. $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$; 5 см, 8 см, 0,1 см, $3\sqrt{10}$ м.

1.124. 1,1; 1,9; 2,2; 0,3; 1,3; 1,6; 2.

1.125. 0,4; 2,3; 3,2; 0,5; 4,8; 5,8.

1.126. 2; 5; 7; 10; 25; 100; 0,8; 0,9; $\dfrac{2}{3}$; 1,5; 1,7; $\dfrac{7}{11}$.

1.127. 81; 196; 361; 0,01; 2,25; 22,09; 529; $\dfrac{1}{4}$; $5\dfrac{4}{9}$; $\dfrac{4}{81}$; $\dfrac{9}{64}$.

1.128. 2) Нет; 4) да; 6) да; 8) нет; 10) да; 12) нет.

1.129. 1) Да; 3) нет; 5) да.

1.130. 2) $y(8) < y(10)$; 4) $y(0{,}3) < y(0{,}4)$; 6) $y(9{,}5) < y(10)$; 8) $y(145{,}7) > y(142{,}9)$.

1.132. 2) **1)** $[0; 16]$; **2)** $[0; 4]$; **3)** 4; 0; **4)** (0; 0); **5)** 0; **6)** $(0; 16]$; **7)** $[0; 16]$ — промежуток возрастания; промежутков убывания нет; 4) **1)** $[1; 16]$; **2)** $[1; 4]$; **3)** 4; 1; **4)** нет; **5)** нет; **6)** $[1; 16]$, **7)** $[1; 16]$ — промежуток возрастания; промежутков убывания нет.

1.133. 1) Да; 3) нет; 5) да.

1.134. 2) 19; 4) –8; 2; 6) 1; 4; 8) –5.

1.135. 1) –2; 3; 3) ±2; 5) –1; 7) 2.

1.136. 2) –1,8; –1,5; –1,1; 0; 1,2; 1,4; 1,7.

1.137. 1) $0{,}8^3 < 1$; 3) $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^3 < \left(-\dfrac{1}{5}\right)^3$; 5) $(-1{,}7)^3 < (-1{,}3)^3$.

1.138. $(-1{,}6)^3$; $(-1{,}5)^3$; $(-1{,}3)^3$; $0{,}3^3$; $0{,}4^3$; $0{,}52^3$; $1{,}2^3$.

1.139. 1) Да; 3) да; 5) нет.

1.140. Например, 2.

1.141. Например, –2.

1.142. 2) $-1 < x^3 \leqslant 8$; 4) $0 < x^3 < 27$.

1.143. 1) Да; 3) нет (кроме $m = n = 0$); 5) да; 7) да.

1.144. 2) **1)** $[0; 2]$; **2)** $[0; 8]$; **3)** 8; 0; **4)** (0; 0); **5)** 0; **6)** $(0; 2]$; **7)** $[0; 2]$ — промежуток возрастания; промежутков убывания нет; 4) **1)** $[-3; 1]$; **2)** $[-27; 1]$; **3)** 1; –27; **4)** (0; 0); **5)** 0; **6)** $[-3; 0)$, $(0; 1]$; **7)** $[-3; 1]$ — промежуток возрастания; промежутков убывания нет.

1.145. 1) 0; 1; 3) ±1.

1.146. $-\dfrac{1}{5}$; $-\dfrac{1}{2}$; –1; –5; 5; 1; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{5}$.

1.147. 1; 2; 3; 4; 12; –12; –4; –3; –2; –1; –0,5.

1.148. 30 ч; 22 ч 30 мин; 20 ч; 15 ч.

1.149. 1) $-\dfrac{3}{5}$; $-\dfrac{6}{5}$; –2; –6; 12; 6: 1; $\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{3}$.

1.150. 2) Нет; 4) да.

1.151. 1) Да; 3) нет; 5) да.

1.152. 2) 1; 3; 6; 48; –8; –4; $-\frac{2}{3}$.
1.153. 1) Да; 3) нет; 5) да.
1.154. 2) $y = \frac{6}{x}$; 4) $y = \frac{1350}{x}$.
1.155. 1) 10.
1.156. 2) Нет; 4) да; 6) да.
1.157. 1) **1)** $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; **2)** $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; **3)** нет; **4)** нет; **5)** нет; **6)** $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ +\infty)$; **7)** $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$ — промежутки возрастания; промежутков убывания нет.
1.158. 2) –1,4; –1,9; 1,5; 0,9; 0,8.
1.159. 1) $\frac{3}{4}$; 1; 2; –3; $-\frac{3}{2}$; $-\frac{2}{3}$.
1.160. 2) $y = \frac{338}{x}$; 4) $y = -\frac{125}{x}$.
1.161. 1) 4 см; ≈5,3 см; 2 см; 1 см; 3) 8 см^2.
1.163. 1) $y = -\frac{2}{x}$, см. ответы к **1.157**, 1); 3) $y = \frac{2}{x}$, **1)** $(-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; **2)** $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; **3)** нет; **4)** нет; **5)** нет; **6)** $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ +\infty)$; **7)** промежутков возрастания нет; $(-\infty;\ -1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ +\infty)$ — промежутки убывания.
1.165. 1) $a > 6$; 3) $a < 0,5$; 5) $a < -1$ и $a > 1$.
1.166. 2) $a < -2$; 4) $a < 2$; 6) $-4 < a < 6$.
1.167. 1) 0; 3; 3) –3,5; 1.
1.170. 2) $y = |\ x\ |$; **1)** [–5; 2]; **2)** [0; 5]; **3)** 5; 0; **4)** (0; 0); **5)** 0; **6)** [–5; 0), (0; 2]; **7)** [0; 2] — промежуток возрастания; [–5; 0] — промежуток убывания; 4) **1)** [–3; 6]; **2)** [–2; 4]; **3)** 2; –4; **4)** (–2; 0), (0; –2), (2; 0); **5)** –2; 2; **6)** [–3; –2), (–2; 2), (2; 6]; **7)** [0; 6] — промежуток возрастания; [–3; 0] — промежуток убывания.
1.171. 1) (–6; 6), (6; 6); 3) (–16; 16), (16; 16); 5) (–1; 1); (1; 1); 7) (–15; 15), (15; 15).
1.172. 2) 3; 4; 4) –5; 2.
1.173. 1) 2; 3; 3) ± 3; 5) 0; 7) $a \neq -7$.
1.174. 2) **1)** ***R***; **2)** $[0;\ +\infty)$; **3)** наибольшего значения нет; 0 — наименьшее значение; **4)** (0; 0); **5)** 0; **6)** $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ +\infty)$; **7)** $[0;\ +\infty)$ — промежуток возрастания; $(-\infty;\ 0]$ — промежуток убывания; 4) **1)** ***R***; **2)** $(-\infty;\ 0]$; **3)** 0 — наибольшее значение; наименьшего значения нет; **4)** (0; 0); **5)** 0; **6)** $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ +\infty)$; **7)** $(-\infty;\ 0]$ — промежуток возрастания; $[0;\ +\infty)$ — промежуток убывания; 6) см. ответы к 2); 8) см. ответы к 4); 10) **1)** ***R***; **2)** $[0;\ +\infty)$; **3)** наибольшего значения нет; 0 — наименьшее значение; **4)** (0; 2), (2; 0); **5)** 2; **6)** $(-\infty;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$; **7)** $[2;\ +\infty)$ — промежуток возрастания; $(-\infty;\ 2]$ — промежуток убывания; 12) **1)** ***R***; **2)** $[2;\ +\infty)$; **3)** наибольшего значения нет; 2 — наименьшее значение; **4)** (0; 2); **5)** нет; **6)** $(-\infty;\ +\infty)$; **7)** $[0;\ +\infty)$ — промежуток возрастания; $(-\infty;\ 0]$ — промежуток убывания.
1.175. 1) **1)** $[4;\ +\infty)$; **2)** $[5;\ +\infty)$; **3)** наибольшего значения нет; 5 — наименьшее значение; **4)** нет; **5)** нет; **6)** $[4;\ +\infty)$; **7)** $[4;\ +\infty)$ — промежуток возрастания; 3) **1)** ***R***; **2)** ***R***; **3)** нет; **4)** (0; –59), (≈2,3; 0); **5)** ≈2,3; **6)** $(-\infty;\ \approx 2,3)$, $(\approx 2,3;\ +\infty)$; **7)** ***R*** — промежуток возрастания; промежутков убывания нет; 5) **1)** $(-\infty;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$; **2)** $(-\infty;\ 5) \cup (5;\ +\infty)$; **3)** нет; **4)** (0; 4,75), (3,8; 0); **5)** 3,8; **6)** $(-\infty;\ 3,8)$, (3,8; 4), $(4;\ +\infty)$;

7) $(-\infty;\ 4)$, $(4;\ +\infty)$ — промежутки убывания; промежутков возрастания нет; **7) 1)** $\boldsymbol{R}$; **2)** $[5;\ +\infty)$; **3)** наибольшего значения нет; 5 — наименьшее значение; **4)** $(0;\ 9)$; **5)** нет; **6)** $\boldsymbol{R}$; **7)** $[4;\ +\infty)$ — промежуток возрастания; $(-\infty;\ 4]$ — промежуток убывания.

Глава 2. Квадратные неравенства

2.1. 1) $(-\infty;\ 1{,}5)$; 3) $\left(\dfrac{15}{46};\ +\infty\right)$; 5) $(-1;\ +\infty)$; 7) $(-\infty;\ 0{,}5]$.

2.2. 2) $(-18;\ 6)$; 4) $(-\infty;\ -15) \cup (5;\ +\infty)$; 6) $(-\infty;\ -8{,}4] \cup [12;\ +\infty)$; 8) $(-19{,}6;\ 3{,}6)$; 10) $(-\infty;\ -126) \cup (42;\ +\infty)$.

2.3. 1) $(-\infty;\ 7] \cup [9;\ +\infty)$; 3) $(-2;\ 1{,}5)$; 5) $\boldsymbol{R}$; 7) $x \ne \dfrac{24}{7}$.

2.4. 2) Нет; 4) нет.

2.5. 1) $\boldsymbol{R}$; 3) нет решений; 5) нет решений.

2.6. 2) -1; 0; 1; 4) -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 6) 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8) -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6.

2.7. 1) $x \ne -3$; 3) -3; 5) нет решений; 7) $\boldsymbol{R}$; 9) $\boldsymbol{R}$.

2.8. 2) $\boldsymbol{R}$; 4) $\boldsymbol{R}$.

2.9. 1) $(-\infty;\ -7] \cup [7;\ +\infty)$; 3) $(-12;\ 12)$; 5) $\left[-\sqrt{7};\ \sqrt{7}\right]$.

2.10. 2) $[-2;\ 2]$; 4) $(-\infty;\ -6] \cup [6;\ +\infty)$; 6) $\left(-\sqrt{13};\ \sqrt{13}\right)$.

2.12. 2) Да; 4) нет.

2.13. 1) Ни при каких; 3) $\boldsymbol{R}$; 5) 7.

2.14. 2) Если $p \leqslant 0$, то x — любое; если $p > 0$, то $x \in (-\infty;\ -\sqrt{p}\ ] \cup [\sqrt{p};\ +\infty)$; 4) если $p = 0$, то $x \ne 0$; если $p \ne 0$, то x — любое.

2.15. 1) $\boldsymbol{R}$; 3) если $p \leqslant -4$, то $x \in (-\infty;\ p)$; если $p > -4$, то $x \in (-\infty;\ -4) \cup (-4;\ p)$; 5) если $p \leqslant 5$, то $x \in (-\infty;\ 5]$; если $p > 5$, то $x \in (-\infty;\ 5] \cup \{p\}$.

2.17. 1) $\boldsymbol{R}$; 3) $\boldsymbol{R}$; 5) нет решений; 7) нет решений.

2.18. 2) $\boldsymbol{R}$; 4) нет решений; 6) нет решений; 8) $\boldsymbol{R}$; 10) $\boldsymbol{R}$.

2.19. 1) $\boldsymbol{R}$; 3) $\boldsymbol{R}$.

2.20. 2) Нет решений; 4) нет решений; 6) нет решений; 8) нет решений.

2.23. 1) а) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$; б) «минус»; в) $\boldsymbol{R}$; г) нет; 3) а) $a > 0$, $b = 0$, $c > 0$; б) «минус»; в) $\boldsymbol{R}$; г) нет.

2.24. 2) $(-\infty;\ -6)$; 4) $[1{,}2;\ +\infty)$.

2.27. 1) $x \ne 4$; 3) нет решений; 5) $x \ne 3$; 7) $x \ne \dfrac{1}{2}$; 9) $\boldsymbol{R}$.

2.28. 2) $x \ne -5$; 4) $x \ne -1{,}5$; 6) $x \ne 0{,}5$; 8) $\pm\ 0{,}5\sqrt{3}$.

2.29. 1) 5; 3) $\boldsymbol{R}$.

2.30. 2) а) Ни при каких; б) $x \ne p$; в) $x = p$; г) $\boldsymbol{R}$; д) $x = p$; е) $x \ne p$; 4) а) ни при каких; б) $x \ne 0$; в) $x = 0$; г) $\boldsymbol{R}$; д) $x = 0$; е) $x \ne 0$.

2.31. 1) $(3;\ +\infty)$; 3) $(-0{,}25;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$; 5) $(-50;\ -3) \cup (-3;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

2.32. 2) Ни при каких; 4) $p \leqslant 0$; 6) $p \geqslant 0$.

2.33. 1) а) $(-3;\ 1)$; б) $(-\infty;\ -3) \cup (1;\ +\infty)$.

2.34. 2) $(-1;\ 3)$; 4) $(-\infty;\ -1) \cup (2;\ +\infty)$; 6) $[-2;\ 0{,}5]$; 8) $(-\infty;\ -1] \cup [0{,}25;\ +\infty)$; 10) $(-\infty;\ -5) \cup (3;\ +\infty)$.

2.35. 1) $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3};\ +\infty\right)$; 3) $(1;\ 8)$; 5) $(-\infty;\ -3] \cup [5;\ +\infty)$.

2.36. 2) $\left(-3\dfrac{1}{3};\ 3\dfrac{1}{3}\right)$; 4) $\left[-\sqrt{7};\ \sqrt{7}\right]$.

2.37. 1) $\left[-\sqrt{10};\ \sqrt{10}\right]$; 3) $\left(-\infty;\ -\sqrt{21}\right) \cup \left(\sqrt{21};\ +\infty\right)$; 5) $\left(-\infty;\ -\sqrt{15}\right) \cup \left(\sqrt{15};\ +\infty\right)$.

2.38. 2) $(0;\ 3)$; 4) $(-\infty;\ 0] \cup \left(\frac{5}{16};\ +\infty\right)$; 6) $(-\infty;\ 0] \cup [9;\ +\infty)$; 8) $(9;\ +\infty)$; 10) $(-\infty;\ 0{,}25]$.

2.39. 1) $(-4;\ 1{,}5)$; 3) $(-\infty;\ 7] \cup [15;\ +\infty)$; 5) $\left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right) \cup (4;\ +\infty)$.

2.40. 2) $[-2{,}5;\ 0]$; 4) $(-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$.

2.41. 1) $(-\infty;\ 2) \cup (3;\ +\infty)$; 3) $\boldsymbol{R}$; 5) $(-\infty;\ -2) \cup (2;\ +\infty)$.

2.42. 2) $(-\infty;\ -1) \cup (4;\ +\infty)$; 4) $\left(-\frac{1}{3};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{1}{2}\right)$; 6) $(-\infty;\ -1] \cup \{0\} \cup [2{,}5;\ +\infty)$.

2.43. 1) -3; -2; 3) 0; 1; 2; 3; 4; 5; 5) 0; 1; 2.

2.44. 2) $[-3;\ 5]$; 4) $[-2{,}5;\ 1]$.

2.45. 1) $(-\infty;\ 1)$, $\left(1;\ 1\frac{2}{3}\right)$; $\left(1\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; 3) $(-\infty;\ -0{,}2)$, $(-0{,}2;\ 2)$; $(2;\ +\infty)$.

2.46. 2) $[-0{,}4;\ 2]$; 4) $(-\infty;\ 1{,}5) \cup (2;\ +\infty)$.

2.47. 1) а) $x < 0$, $x > t$; б) $0 < x < t$; в) $0 \leqslant x \leqslant t$; г) $x \leqslant 0$, $x \geqslant t$; 3) а) $\boldsymbol{R}$; б) ни при каких; в) ни при каких; г) $\boldsymbol{R}$; 5) а) ни при каких; б) $x \neq t$; в) $\boldsymbol{R}$; г) $x = t$.

2.48. 2) $[-1{,}6;\ 7]$; 4) $[1{,}5;\ 3{,}25]$.

2.49. 1) $(1;\ 2)$.

2.50. 2) $(1;\ 6)$.

2.51. 1) $(-\infty;\ -2) \cup (3;\ +\infty)$; 3) $[5;\ 6]$; 5) $\left(-\frac{1}{8};\ 7\right)$; 7) $(-\infty;\ 3{,}7] \cup [4{,}8;\ +\infty)$.

2.52. 2) $(-20;\ -5) \cup (15;\ +\infty)$; 4) $(-6;\ -3) \cup (-2;\ 0)$; 6) $[-9{,}8;\ -6{,}8] \cup [2{,}7;\ +\infty)$; 8) $(-\infty;\ -3{,}1] \cup [-2{,}9;\ 4{,}8]$.

2.53. 1) $(-\infty;\ -6{,}4) \cup (-4{,}2;\ +\infty)$; 3) $(-0{,}375;\ -0{,}25)$; 5) $(-\infty;\ -10] \cup [12;\ +\infty)$; 7) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; 9) $(-\infty;\ 0{,}7] \cup [0{,}8;\ +\infty)$.

2.54. 2) $(2;\ 3)$; 4) $(-\infty;\ -7] \cup [4;\ +\infty)$; 6) $\left(-\frac{1}{10};\ \frac{1}{3}\right) \cup (6;\ +\infty)$; 8) $(-\infty;\ 0] \cup \left[\frac{1}{8};\ 4\right]$.

2.55. 1) $[3;\ 4]$; 3) $(-\infty;\ -10] \cup [0;\ 3]$; 5) $(-\infty;\ 0) \cup (1;\ 3) \cup (4;\ +\infty)$.

2.56. 2) $(-\infty;\ -4) \cup (0{,}5;\ 2)$; 4) $(-5;\ 0) \cup (0{,}25;\ 1)$.

2.57. 1) $\left(0;\ 1+\sqrt{3}\right]$.

2.58. 2) $\left[-\frac{2}{5};\ \frac{1}{3}\right]$.

2.59. 1) $(-2{,}5;\ 0{,}5)$; 3) $(-\infty;\ 0) \cup (3;\ +\infty)$; 5) $\left(-\infty;\ -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2};\ +\infty\right)$; 7) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

2.60. 2) $(0;\ 0{,}2)$; 4) $(-\infty;\ -7] \cup [0;\ +\infty)$; 6) $(-1;\ 0) \cup (3;\ +\infty)$; 8) $[-0{,}5;\ 0] \cup [2;\ +\infty)$; 10) $(0;\ 1{,}5) \cup (2;\ +\infty)$.

2.61. 1) $(-\infty;\ 0] \cup [2;\ +\infty)]$; 3) $(-\infty;\ -7) \cup (0;\ 0{,}5)$; 5) $(-\infty;\ 0)$; 7) $(-\infty;\ 0) \cup (1;\ 1{,}2)$; 9) $(0{,}9;\ +\infty)$.

2.62. 2) $(-\infty;\ -4)$; 4) $(-\infty;\ -2{,}7] \cup [1{,}4;\ +\infty)$.

2.63. 1) $(-\infty;\ -9) \cup (4;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ 0) \cup (6;\ 7) \cup (7;\ +\infty)$; 5) $(-3;\ 3)$; 7) $\left(-\infty;\ -2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2};\ +\infty\right)$.

2.64. 2) $(-\infty;\ -3] \cup [3;\ 4{,}9]$; 4) $(-\infty;\ -2{,}8) \cup (0;\ +\infty)$; 6) $(-\infty;\ -2{,}1) \cup (-2{,}1;\ -0{,}1) \cup (0{,}1;\ +\infty)$; 8) $\left[-\sqrt{17};\ \sqrt{17}\right] \cup \{5\}$; 10) $(-\infty;\ 1{,}5]$.

2.65. 1) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right] \cup [1;\ +\infty]$; 3) $\left(-\infty;\ -\frac{2}{7}\right] \cup \{0\} \cup [1;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ -1) \cup (3;\ 7) \cup (7;\ +\infty)$; 7) $(-\infty;\ -3) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 3) \cup (5;\ +\infty)$.

2.66. 2) а) $(-\infty;\ -2) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -2] \cup [-1;\ +\infty)$; в) $(-2;\ -1)$; г) $[-2;\ -1] \cup \{0\}$; д) $\{-2;\ -1;\ 0\}$; е) $(-\infty;\ -2) \cup (-2;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

2.67. 1) $(-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [7; +\infty)$; 3) $(-\infty; -5] \cup [-4; 0] \cup \{2\}$.
2.68. 2) $(2; 9)$.
2.69. 1) $(-7; 2) \cup (2; 3)$; 3) $(-\infty; -15{,}6) \cup (-3; 4)$.
2.70. 2) $(-6; -3) \cup (-2; 1)$; 4) $(-\infty; 1{,}5] \cup [2; +\infty)$.
2.71. 1) $(-10; 10)$; 3) $[-2; -1{,}5] \cup [1{,}5; 2]$.
2.72. 2) $(-\infty; -7] \cup [7; +\infty) \cup \{-4; 4\}$; 4) $(-3; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 4)$; 6) $\{-8; 8\}$.
2.73. 1) $(-2; 3)$; 3) $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$.
2.74. 2) -2; 1; 2; 4) -1; 5; 8; 6) 3; 5; 8.
2.75. 1) 2; $[-3; 4)$; 3) 2; $(-\infty; -5]$; 5) 2; нет решений; 7) 3; $[4; 7)$.
2.77. Например: 1) $\begin{cases} x+3>0, \\ 2x-1 \leqslant 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+14 \geqslant 0, \\ 5x-12 \leqslant 0. \end{cases}$
2.78. Например: 2) $\begin{cases} -3x+17 \geqslant 2, \\ x \leqslant 10, \\ 7x-28 \leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x-7 \geqslant 2, \\ -3x+2 \leqslant x+5, \\ 3x-6>0. \end{cases}$
2.79. 1) $(-\infty; -0{,}8)$; 3) нет решений; 5) нет решений.
2.80. 2) $(-7; -3{,}5]$; 4) нет решений; 6) $[-2; 2]$.
2.81. 1) 2; 3) 1; 2; 3; 4; 5; 6.
2.82. 2) $(-\infty; -2)$; 4) $(-\infty; -2)$; 6) $[3; +\infty)$.
2.83. 1) $(-2; 4]$; 3) $[0{,}4; 4]$; 5) $[-4; 4]$.
2.84. 2) $(-\infty; -2)$; 4) $(-\infty; -7]$.
2.85. 1) Нет решений; 3) нет решений.
2.86. 2) $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right) \cup (1; 2{,}5]$; 4) $(12; +\infty)$.
2.87. 1) $[0; 3) \cup (5; +\infty)$; 3) $[4; 5)$.
2.88. 2) $(-\infty; 12)$; 4) $(-\infty; 1]$.
2.89. 1) Нет решений; 3) нет решений.
2.90. 2) $\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right]$; 4) $[-1; -0{,}25) \cup (2; +\infty)$.
2.91. 1) 3.
2.92. 2) $(0; 3]$; 4) $(3; 8)$.
2.93. 1) $(1; 2]$; 3) $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup [2; +\infty)$.
2.94. 2) 9.
2.95. 1) $[2; 3]$; 3) $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup (5; +\infty)$; 5) нет.
2.96. 2) $[-2; 2) \cup (2; 3]$; 4) $(-\infty; -3] \cup \left[-\dfrac{1}{3}; 2\right] \cup [5; +\infty]$.
2.97. 1) $[5; +\infty)$; 3) $\{3\}$.
2.98. 2) $(-5; -3] \cup [9; 11)$; 4) $(2{,}5; +\infty)$.
2.99. 1) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.
2.100. 2) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.
2.101. 1) $a > 2$.
2.102. 2) $b > 8$.
2.103. 1) $c \leqslant 3$.
2.104. 2) $1 < p \leqslant 2$.
2.105. 1) 8 и 9; 2) 6; 3) 3; 4) 5.
2.106. 2) $\{-2; 1{,}5\} \cup [8; +\infty)$; 4) $\{-2{,}5; 2\} \cup [3; +\infty)$.
2.107. 1) $[6; +\infty)$.
2.108. 2) ± 2; 4) 1; 5; 6) нет корней.

2.109. 1) 1; 1,5; 3) ±3; 5) 0; 5; 7) $1\frac{2}{3}$.

2.110. 2) –8; 0; 4) –14; 4; 6) –1; 3,5; 8) –12,5.

2.111. 1) $3\frac{1}{3}$; 7; 3) –24; 20; 5) –1,8; 5.

2.112. 2) 6; 4) $\frac{10}{11}$; 5; 6) 2; $6\frac{2}{3}$.

2.113. 1) 1; 3) $-7\frac{1}{2}$; $-3\frac{2}{3}$; 2; 5) $\frac{1}{3}$.

2.114. 2) 5; 4) $1\frac{1}{3}$; 6) нет корней.

2.115. 1) –0,5; 3) 5.

2.116. 1) 12 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 15 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 2) 60 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 80 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 3) 8 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 4) 18 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

2.117. 1) За 10 мин; за 15 мин; 2) за 6 ч; за 9 ч; 3) 7; 4) 21.

2.118. 2) $(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$; 4) $(-\infty; -8,6) \cup [0; +\infty)$; 6) $(3,6; 4,9)$; 8) $(0,9; 4]$; 10) $(-2; 5)$.

2.119. 1) $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$; 3) $(6; 11)$.

2.120. 2) $(0; 8)$; 4) $(-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$.

2.121. 1) $(-\infty; -11) \cup (-8; 4) \cup (12; +\infty)$; 3) $(-14; -5) \cup (1; 7)$; 5) $(-18; -16] \cup [-10; 7)$.

2.122. 2) $(-\infty; -5) \cup [-3,2; 2) \cup [2,3; +\infty)$;

4) $\left(-\infty; -2\frac{1}{3}\right] \cup \left(-1; 2\frac{1}{2}\right] \cup (4; +\infty)$; 6) $\left(-1\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) \cup (3; 5)$.

2.123. 1) $(1; 3] \cup [4; +\infty)$; 3) $(-5; -3) \cup (1; 2)$; 5) $(-\infty; -3) \cup [2,5; +\infty)$.

2.124. 2) $\boldsymbol{R}$; 4) нет решений; 6) $(-\infty; -0,5) \cup (-0,5; +\infty)$.

2.125. 1) $(-\infty; -7) \cup (-4; 4)$; 3) $(-\infty; -7] \cup [2; +\infty)$.

2.126. 2) $(-\infty; -8) \cup (-4; 3) \cup (3; 4)$; 4) $(-\infty; -6) \cup (-2; 2) \cup \{12\}$; 6) $(-2; 0) \cup (0; 2) \cup (8; +\infty)$; 8) $(-\infty; -5) \cup (-3; 3) \cup (5; +\infty)$.

2.127. 1) $(0; 1]$; 3) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$; 5) $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$;

7) $\left(-\infty; -5\frac{1}{3}\right) \cup \left(-2\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 9) $\left(-\sqrt{7}; -2\right) \cup \left[\sqrt{7}; 2\frac{2}{3}\right)$.

2.128. 2) $(2; 3) \cup \left(8\frac{6}{7}; 10\right)$; 4) $\left(-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 6) $(-\infty; -1) \cup (1; 5)$;

8) $(-\infty; -1,5) \cup (0,9; 1,5)$.

2.129. 1) $(-4; 4)$; 3) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 5) $\left[-1\frac{2}{3}; -1\right] \cup \left[-\frac{1}{5}; +\infty\right]$;

7) $(-\infty; 0,5] \cup (1; 4) \cup (4; +\infty)$; 9) $(-0,5; 0,5]$.

2.130. 2) $[-10; 0) \cup [10; +\infty)$; 4) $\left(0; \frac{10}{11}\right] \cup (2; +\infty)$; 6) $(-4; -1] \cup [1; 2)$.

2.131. 1) $(-\infty; 0) \cup (6; +\infty)$; 3) $[-0,5; 3]$.

2.132. 2) $(-6; 1) \cup (5; 6)$; 4) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup [3; +\infty)$; 6) $(-8; -5) \cup (-2; 2) \cup (5; +\infty)$.

2.133. 1) $\left[2\frac{2}{3}; 6\right) \cup (6; 16]$; 3) $(-\infty; -4) \cup (0,5; +\infty)$.

2.134. 2) $(-\infty; 0,75]$; 4) $(-8; -7)$.

2.135. 1) $(2; 4)$; 3) $(-5; 1)$.

2.136. 1) Да; 2) если a и b стороны прямоугольника, то $a \in (0; 2)$; $b \in (3; 5)$.

2.137. 1) $(3; 7)$; 2) $[13; 36]$.

2.138. 1) $(20; 60)$; 2) $(10; 70)$.

Глава 3
Системы уравнений с двумя переменными

3.1. 1) Да; 3) да; 5) да.

3.2. 2) Нет; 4) нет; 6) нет.

3.3. Например: 1) (0; 0), (1; 1), (2; 2); 3) (–2; –1), (5; 1), (12; 3); 5) (0; 2), (1; 2), (2; 2); 7) (0; 3), (3; 0), (1; 2); 9) (0; 5), (5; 0), (2; 3).

3.4. 2) Да; 4) да; 6) да; 8) да.

3.5. 1) $y = \frac{25 - 2x}{6}$; 3) $y = -\frac{6x + 48}{11}$; 5) $y = \frac{3 - 8x}{7}$; 7) $y = \frac{9x - 17}{6}$; 9) $y = \frac{16 - 10x}{13}$.

3.6. 2) $\left(x_0; \frac{7x_0 - 10}{14}\right)$, $x_0 \in \boldsymbol{R}$; а) $\left(2; \frac{2}{7}\right)$; б) $\left(-5; -3\frac{3}{14}\right)$; в) $\left(t; \frac{7t - 10}{14}\right)$;
4) $\left(x_0; -\frac{5x_0 + 8}{14}\right)$, $x_0 \in \boldsymbol{R}$; а) $\left(2; -1\frac{2}{7}\right)$; б) $\left(-5; 1\frac{3}{14}\right)$; в) $\left(t; -\frac{5t + 8}{14}\right)$;
6) $\left(x_0; \frac{2 - 9x_0}{5}\right)$, $x_0 \in \boldsymbol{R}$; а) (2; –3,2); б) (–5; 9,4) ; в) $\left(t; \frac{2 - 9t}{5}\right)$;
8) $\left(x_0; \frac{12x_0 - 8}{9}\right)$, $x_0 \in \boldsymbol{R}$; а) $\left(2; 1\frac{7}{9}\right)$; б) $\left(-5; -7\frac{5}{9}\right)$; в) $\left(t; \frac{12t - 8}{9}\right)$;
10) $\left(x_0; \frac{15 - 8x_0}{9}\right)$, $x_0 \in \boldsymbol{R}$; а) $\left(2; -\frac{1}{9}\right)$; б) $\left(-5; 6\frac{1}{9}\right)$; в) $\left(t; \frac{15 - 8t}{9}\right)$.

3.7. 1) $\left(3\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right)$; 3) (–2; –4); 5) (–5; 1); 7) (1; 3); 9) нет решений.

3.8. 2) Да; 4) нет.

3.9. 1) Да; 3) нет; 5) нет.

3.10. Например: 2) (3; 1), (5; 2); 4) (–2; 4), (0; 0).

3.11. 1) а) Да; б) да; в) да; г) нет; д) да; е) нет.

3.13. 1) Да; 3) да; 5) нет.

3.14. 2) $m = -5$, $n = -7$; 4) $m = 6$, $n = 0$; 6) $m = 9$, $n = 16{,}5$.

3.15. 1) (25; 5); 3) (9; 7); 5) (1; 2); 7) (–5; 6); 9) (–13; 4).

3.16. 2) (59; 369); 4) $\left(\frac{18}{203}; -\frac{40}{203}\right)$; 6) (3; 2); 8) (3; 2).

3.17. 1) Нет решений; 3) нет решений; 5) (0,75; 2,25); 7) $\left(-6\frac{6}{7}; 1\frac{2}{7}\right)$; 9) (–0,5; 6,5); 11) нет решений.

3.18. 1) (4; 11); 2) (6; 0); 4) (14; 13); 6) (3; 2).

3.19. 1) $\left(\frac{3a + 14}{a^2 + 6}; \frac{9 - 7a}{a^2 + 6}\right)$, $a \in \boldsymbol{R}$; 2) если $a = \pm\sqrt{6}$, то решений нет; если $a \neq \pm\sqrt{6}$, то $\left(\frac{3a - 14}{a^2 - 6}; \frac{7a - 9}{a^2 - 6}\right)$; 3) $\left(\frac{7 - 2a}{45}; \frac{7a - 2}{45}\right)$, $a \in \boldsymbol{R}$; 4) если $a = 3$, то $\left(\frac{3t + 3}{7}; t\right)$, $t \in \boldsymbol{R}$; если $a \neq 3$, то решений нет.

3.20. 1) Если $m = 3$, то решений нет; если $m \neq 3$, то $\left(\frac{3m^2 - 9}{m - 3}; \frac{9 - 9m}{2m - 6}\right)$; 2) если $m = 1{,}5$, то $\left(\frac{6 - 3t}{2}; t\right)$, $t \in \boldsymbol{R}$; если $m \neq 1{,}5$, то решений нет; 3) если $m = 2$, то $(2t + 3; t)$, $t \in \boldsymbol{R}$; если $m \neq 0$, $m \neq 2$, то $\left(0; -\frac{3}{m}\right)$, если $m = 0$, то решений нет; 4) если $m \neq \pm 9$, то (2; 0); если $m = -9$, то $(2 - 3t; t)$, $t \in \boldsymbol{R}$; если $m = 9$, то $(3t + 2; t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.

3.21. 1) (1; –1); 3) (2; –5); 5) (3,2; 4,6); 7) (125; –47).
3.22. 2) $\left(t;\ \frac{7t-3}{3}\right)$, $t \in \boldsymbol{R}$; 4) нет решений; 6) (0; 0); 8) нет решений.
3.23. 1) $\left(-10\frac{2}{7};\ -39\frac{3}{7}\right)$; 3) (7,2; 13,2); 5) (18; 6); 7) (5; 8).
3.24. 2) (–0,84; –1,88); 4) (1,4; –0,2).
3.25. 1) $(3a-3b;\ -2a)$; 3) $(a-6b;\ 2a+b)$.
3.26. 2) (–1,5; 2); 4) (25,5; –16).
3.27. 1) (2; 1); 3) $\left(\frac{2}{7};\ \frac{37}{7}\right)$.
3.28. 1) $a > 3\frac{1}{3}$; 2) $a > 12{,}6$.
3.29. 1) Ни при каких; 2) $-3{,}75 < a < 4$.
3.30. 1) –14; 2) –17,5.
3.31. 1) $a = 30$, $b = -0{,}8$; 2) $a = -1\frac{1}{3}$, $b = -3\frac{1}{3}$.
3.37. 1) Графики совпадают; 3) $\left(-\frac{7}{16};\ -\frac{5}{8}\right)$; 5) прямые не пересекаются.
3.38. 2) (≈ –1,3; –2).
3.39. 1) $3x + y - 5 = 0$; 3) $9x + y + 53 = 0$.
3.40. 2) $\left(-2\frac{17}{82};\ -\frac{15}{41}\right)$.
3.41. 1) –2.
3.42. 2) 1; 4) 0; 6) 1.
3.43. Да, (1; 4).
3.44. 2) 1; 4) 1; 6) 0.
3.46. 2) $(t;\ t-3)$, $t \in \boldsymbol{R}$; 4) $(t;\ 14-7t)$, $t \in \boldsymbol{R}$.
3.47. 1) (2,5; 1); 3) $(t;\ 2-2t)$, $t \in \boldsymbol{R}$; 5) нет решений.
3.48. 2) (3; –2); 4) (0,4; –0,2).
3.49. а) 2), 3), 9); б) 1), 5), 6), 7), 11), 12); в) 4), 8), 10).
3.50. 1) Если $m = 0$, то б); если $m \neq 0$, то д); 2) в); 3) если $m = \pm\sqrt{2}$, то д); если $m \neq \pm\sqrt{2}$, то а); 4) г).
3.51. 1) Нет; 3) да; 5) да; 7) нет.
3.52. 2) а) $k = 0{,}8$; б) $k \neq 0{,}8$.
3.53. 1) AD: $x - 4y - 10 = 0$; CD: $2x - y - 6 = 0$; $D(2;\ -2)$; 3) AD: $x + y - 1 = 0$; CD: $2x + y - 6 = 0$; $D(5;\ -4)$.
3.54. 2) Да; 4) да; 6) нет.
3.55. 1) а) $ab \neq 6$; б) $ab = 6$, $a \neq c$; в) $ab = 6$, $a = c$.
3.56. 2) 23; 4) 25; 6) $11\frac{1}{14}$; 8) $67\frac{1}{22}$.
3.57. 1) а) $5\sqrt{2}$; б) (–3,5; 5,5); 3) а) $\sqrt{170}$; б) (5,5; 4,5); 5) а) $2\sqrt{17}$; б) (1; –1); 7) а) $\sqrt{34}$; б) (2,5; –1,5).
3.58. 2) $x^2 + (y-6)^2 = 25$; 4) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$; 6) $(x-8)^2 + (y+9)^2 = 5$; 8) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$.
3.59. 1) $\left(0;\ -5 \pm 3\sqrt{3}\right)$, $\left(3 \pm \sqrt{11};\ 0\right)$; 3) $\left(0;\ -1 \pm 2\sqrt{2}\right)$, $\left(1 \pm 2\sqrt{2};\ 0\right)$; 5) $\left(0;\ 4 \pm \sqrt{91}\right)$, $\left(-3 \pm 2\sqrt{21};\ 0\right)$.
3.60. 2) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$; 4) $(x-1)^2 + (y-10)^2 = 4$; 6) $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 9$.
3.61. 1) $x^2 + y^2 = 25$; 3) $x^2 + y^2 = 34$.
3.62. 2) $(x+1)^2 + (y+5)^2 = 25$; 4) $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 17$.

3.63. 1) AA_1: $x+17y-15=0$; BB_1: $7x-4y-23=0$; CC_1: $8x+13y-38=0$; 3) AA_1: $8x+11y-1=0$; BB_1: $13x-14y+9=0$; CC_1: $x-5y+2=0$.
3.64. 2) 2; 4) 1; 6) 2; 8) 1.
3.65. 1) (–5; –1); 3) (–2; 0), (1; 3); 5) (6,6; 3,2); 7) $(\pm\sqrt{2}; 4)$; 9) (0; –5).
3.66. 2) (3; 1); 4) (1; 4); 6) (1; –2); 8) (–1; –2); (–1; 2); (1; –2); (1; 2).
3.67. 1) (–14; –13); 3) (1,25; 0,5); 5) (–2; 3), (14,5; 8); 7) (3; 2), (–3; –2).
3.68. 2) $\left(-2\frac{2}{27}; -4\frac{1}{18}\right)$, (2; –1); 4) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, $\left(1; -\frac{3}{5}\right)$; 6) (–66; 26), (6; 2); 8) $\left(1\frac{2}{3}; 8\frac{1}{3}\right)$, (1; 9).
3.69. 1) (1; 1), $\left(3\frac{2}{9}; -\frac{1}{9}\right)$; 2) (–1; 1), $\left(1\frac{4}{19}; \frac{7}{19}\right)$; 3) (2; 1); 4) (2; 3).
3.70. 1) –23; 8; 2) 35 и 6.
3.71. 1) 42 и 110; 2) 12 лет и 6 лет.
3.72. 1) 9 и 6; 2) 68 и 4.
3.73. 1) 72 или 94; 2) 25 или 69.
3.74. 1) 33 года, 30 лет; 2) 28,5 года, 25,5 года.
3.75. 1) 41; 2) 46.
3.76. 1) 0,23; 2,3; 2) 1,05; 105.
3.77. 1) 24 ч; 2) 2,4 ч.
3.78. 1) 15 т, 5 т; 2) 62 и 45.
3.79. 1) 15 ч и 10 ч; 2) 4 и 12.
3.80. 1) 80 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, 100 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ или 50 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, 130 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 2) 3 ч 45 мин.
3.81. 1) 73; 2) 28.
3.82. 1) 200 г, 200 г; 2) 52,5 кг, 17,5 кг.
3.83. 1) 14 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$; позже; 2) на 1 ч 4 мин.

Глава 4. Арифметическая и геометрическая прогрессии

4.1. 1) 16; 49; 81; n^2; $(n+3)^2$; 3) 64; 121; $(k+1)^2$; $(n+2)^2$; $(n+4)^2$.
4.2. 2) 5; 9; k; $(n-2)$; $(n+1)$; 4) нет, нет, да, нет, да, да.
4.3. 1) 5; 8; 11; 14; 3) –2; 3; 8; 13; 5) 3; 8; 15; 24; 7) 1; 4; 16; 64.
4.4. 2) 4; 20; 54; 4) 1; $1\frac{1}{2}$; $1\frac{2}{3}$; 6) 4; –8; 16; 8) 0; $1\frac{1}{2}$; $1\frac{7}{9}$.
4.5. 1) 70; 100; 3) 13; 18; 5) $\frac{19}{21}$; $\frac{29}{31}$; 7) 0,2; 0.
4.6. 2) $a_3=10$, $a_5=14$, $a_6=16$; 4) $a_3=8$, $a_5=32$, $a_6=64$; 6) $a_3=6$, $a_5=20$, $a_6=30$; 8) $a_3=-\frac{13}{14}$, $a_5=-\frac{121}{122}$, $a_6=-\frac{364}{365}$.
4.7. 1) 12; 16; 20; 24; 3) 9; 0; –9; –18.
4.8. 2) 5; 10; 15; 20; 25; $a_n=5n$, $n\in N$; 4) 10; 20; 30; 40; 50; $a_n=10n$, $n\in N$.
4.9. 1) 2; 5; 8; 11; 14; $a_n=3n-1$, $n\in N$; 3) 1; 7; 13; 19; 25; $a_n=6n-5$, $n\in N$.
4.10. 2) $a_4=\frac{1}{2}$, $a_6=\frac{1}{3}$, $a_7=\frac{1}{4}$.
4.11. 45 360.
4.12. 997.
4.13. 1) 3,04; 3) 1 909 542.
4.14. 2) Нет; 4) нет; 6) нет; 8) нет.
4.15. 1) 3; 4; 5; 6; 3) 0; –3; –6; –9; 5) 34; 34,5; 35; 35,5.

4.16. 2) 3; 4) 6,375.
4.17. 1) 23; 4; 3) 6; 2; 5) $3\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; 7) $2+5\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 9) 5; 0.
4.18. 2) 98; 4) –22; 6) $-9\frac{1}{3}$.
4.19. 1) $3\frac{1}{3}$; 3) $16\frac{2}{3}$; 5) 2; 7) 5.
4.20. 2) 2; 4) 8; 6) –38; 8) 19.
4.21. 1) 6; 0; –6; –12; –18; 3) 12; 18; 24; 30; 36.
4.22. 2) $a_n = 2n+1$; 4) $a_n = -5n+2$; 6) $a_n = -\frac{1}{3}n + 4\frac{1}{3}$; 8) $a_n = a^3 + n$.
4.23. 1) $a_n = 3n - 2$; 3) $a_n = 5n - 42$.
4.24. 2) 10.
4.25. 1) Нет.
4.26. 2) 15.
4.28. 2) 10; 6; 2; –2; –6; 4) –26; –16; –6; 4; 14.
4.29. 1) $a_1 = 18$, $a_6 = 33$, $d = 3$; 3) $a_1 = -16$, $a_6 = -6$, $d = 2$.
4.30. 2) $a_{29} = 0$, $a_1 = -168$.
4.31. 1) –7; $-3\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{3}$; 3; 3) 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23; 26.
4.32. 2) $a_1 = 5$, $d = 3$; 4) $a_1 = -31$ или $a_1 = 15$, $d = 2$.
4.34. 2) 1980; 4) 5050; 6) $5+60\sqrt{3}$.
4.35. 1) 40 200; 3) 4814.
4.36. 2) 155; 4) –236; 6) 93.
4.37. 1) 13; 403.
4.38. 2) –6,24; 217,2.
4.39. 1) 1,5; 3) –1; 2.
4.40. 2) $3186\,b^2$.
4.41. 1) $a_1 = -2{,}2$, $d = 7{,}6$; 3) $a_1 = 9$, $d = 2$.
4.42. 2) $a_{20} = -36$, $d = -4$.
4.43. 1) 7260; 3) 3720.
4.44. 2) 8015; 4) 12 110.
4.45. 1) а) 66; б) 203,5.
4.46. 2) $a_1 = 12$, $d = 4$.
4.47. 1) 25; 3) 47; 5) 1.
4.48. 2) 13 968; 4) 1320; 6) –7; 8) –84.
4.49. 1) Да; 3) да; 5) да.
4.50. 2) 2350.
4.51. 1) Могут, если стороны $3d$, $4d$ и $5d$, где $d > 0$.
4.52. 2) 4.
4.53. 1) 64; 128; 3) –80; 160; 5) $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$; 7) $4\sqrt{2}$; 8; 9) –6; 6.
4.54. 2) Члены с нечетными номерами отрицательны, с четными номерами — положительны.
4.55. 1) $b_n = 4\cdot 5^{n-1}$; 3) $b_n = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$; 5) $b_n = (-3)\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$; 7) $b_n = 32\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
4.56. 2) $b_1 = 3$; $b_2 = \frac{3}{2}$; $b_3 = \frac{3}{4}$; $b_{n-1} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$; $b_{n+1} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$; 4) $b_1 = 18$; $b_2 = 54$; $b_3 = 162$; $b_{n-1} = 2\cdot 3^n$; $b_{n+1} = 2\cdot 3^{n+2}$.
4.57. 1) 2592; 3) –2187; 5) –3; 7) $-4\sqrt{2}$.
4.58. 2) ± 3; 4) –0,2.
4.59. 1) 7; 3) 9.

4.60. 2) $b_1 = \frac{3}{2}$; $q = 2$; $b_n = \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1}$; 4) $b_1 = -486$; $q = \frac{1}{3}$; $b_n = -486\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

4.61. 1) ±2; 3) $\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$.

4.62. 2) $b_1 = 0{,}4$; $b_4 = 50$; 4) $b_1 = -1$; $b_4 = -0{,}008$.

4.63. 1) 0,2; ±5; 125; ±3125; 78 125; 3) $\frac{11}{81}$; $\pm\frac{11}{27}$; $\frac{11}{9}$; $\pm\frac{11}{3}$; 11.

4.64. 2) $b_7 = \pm3\sqrt{3}$; $q = \pm\sqrt{3}$; 4) $b_7 = \pm2$; $q = \pm0{,}5$.

4.65. 1) $b_5 = \pm10$; $b_1 = \pm\frac{5}{8}$; 3) $b_5 = \pm729\sqrt{2}$; $b_1 = \pm2916\sqrt{2}$.

4.66. 2) 80; 4) ±8,192.

4.67. 1) ±1; 3) ±20; 5) ±1; 7) $\pm4\sqrt{2}$; 9) ±4.

4.68. 2) 0,2; ±2; 20; ±200; 2000.

4.69. 1) Да; 3) нет.

4.72. 2) –10,5; 4) 8,336; 6) –800.

4.73. 1) 315; 3) –7812,6; 5) $242\frac{8}{9}$; 7) $2\frac{17}{324}$.

4.74. 2) 1093; 4) $\frac{255}{512}$.

4.75. 1) $b_8 = 6561$; $S_{10} = 88\,572$; 3) $b_8 = 192$; $S_{10} = 511{,}5$; 5) $b_8 = 32$; $S_{10} = 255{,}75$; 7) $b_8 = 27$; $S_{10} = 270$.

4.76. 2) 10; 4) 6.

4.77. 1) $b_1 = 5$; $b_7 = 320$; 3) $n = 9$; $b_9 = 2048$; 5) $b_1 = 175$; $q = -0{,}8$ или $b_1 = 7$; $q = 4$ или $b_1 = 112$; $q = 1$.

4.78. 2) 160; 4) $-1\frac{31}{32}$.

4.79. 1) ±3; 3) –1275.

4.80. 2) 144; 576; 2304; 9216 или 9216; 2304; 576; 144.

4.81. 24; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45; 48; 51; 54.

4.82. ±125.

4.83. $a_n = 3n - 1$, $b_n = (\pm2)^n$.

4.84. $a_n = 12n - 9$, $b_n = 3^n$.

4.85. $a = 4$, $b = 12$, $c = 36$.

4.86. $a = 7$, $b = 28$, $c = 112$.

4.87. 2.

4.88. $b_1 = 32$; $q = \frac{1}{2}$ или $b_1 = 2$; $q = 2$.

4.89. 4, 11, 18 или 19, 11, 3.

4.90. 3, 7, 11 или 18, 7, –4.

4.91. 5, 15, 45 или 45, 15, 5.

4.92. 4, 8, 12, 18 или 17,5; 12,5; 7,5; 4,5.

4.93. $\frac{4}{9}$; $-2\frac{2}{9}$; $11\frac{1}{9}$ или 4; 12; 36.

4.94. $a_n = -12n + 30$, $b_n = 18\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ или $a_n = 8n$, $b_n = 2^{n+2}$.

4.95. 27; 81; 243.

4.96. –2.

4.97. 1) 220 000 р.; 2) 530 450 р.

4.98. 1) 419 135 р.; 2) 7 %.

4.99. 1) ≈ 296 000 р.; 2) ≈ 354 000 р.

4.100. $a_{50} > b_{50}$.

Упражнения для повторения арифметического и алгебраического материала курса математики 5—9-х классов

1. 1) $\frac{5}{12}$; 2) $1\frac{13}{32}$.

2. 1) $1\frac{11}{120}$; 2) 0,5.

3. 1) 0,1; 2) 3.

4. 1) 2; 2) $2\frac{25}{27}$.

5. 1) 0,1; 2) 1,5.

6. 1) $12\frac{7}{9}$; 2) 9.

7. 1) $1\frac{2}{3}$; 2) 2.

8. 1) 5; 2) 1; 3) 9; 4) 4; 5) 2; 6) 7.

9. 1) −1,4; 2) $11\frac{1}{9}$; 3) 256; 4) $\frac{1}{3}$.

10. 1) $\frac{164\sqrt{5}-665\sqrt{3}}{42}$; 2) $\sqrt{2}-\sqrt{7}$.

11. 1) 4; 2) 10; 3) 6; 4) 6.

12. 1) $6\frac{1}{3}$; 2) −2.

13. $2006^2+2003^2>2004^2+2005^2$; 2) $2222^2+1111^2>2221^2+1112^2$; 3) $4\sqrt{405}>7\sqrt{125}$; 4) $5\sqrt{176}<7\sqrt{99}$; 5) $\sqrt{7}+\sqrt{3}>\sqrt{19}$; 6) $\sqrt{11}-\sqrt{10}<\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

14. 1) $5\sqrt{3}$; 2) $2{,}5\sqrt{10}$; 3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 4) $1{,}6\sqrt[4]{5}$; 5) $2\sqrt[4]{2}$; 6) $\frac{\sqrt{a+b}}{a+b}$; 7) $11+2\sqrt{30}$; 8) $\frac{19+7\sqrt{5}}{29}$; 9) $-\sqrt{a}-9$; 10) $\frac{\sqrt{mn}+n}{n}$.

15. 1) $2+\sqrt{2}$; 2) $3-\sqrt{3}$; 3) $3\sqrt{3}-4$; 4) $6+2\sqrt{6}$; 5) $\frac{4-\sqrt{6}}{10}$; 6) $\frac{75-\sqrt{35}}{130}$; 7) $\sqrt{3}+1$; 8) $4\sqrt{2}-1$; 9) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{2}$.

16. 1) $\frac{1}{13}$; 2) $\frac{1}{6}$.

17. 1) 5; 2) 4.

18. 1) a^2+3; 2) a^2+3.

19. 1) $\sqrt{7}+1$; 2) $\sqrt{6}-1$; 3) $\sqrt{6}-2$; 4) $5-2\sqrt{3}$; 5) $2+\sqrt{5}$; 6) $4-\sqrt{5}$.

20. 1) $2\sqrt{7}-1$; 2) $-2\sqrt{6}$.

21. 1) $\frac{2^{27}}{a^2b}$; 2) $-\frac{b}{2a^2}$.

22. 1) $\frac{b^2}{a^2(a^2+b^2)}$; 2) $\frac{a+b}{b}$.

23. 1) $\frac{2a+5}{2a(2a-5b)}$; 2) $-\frac{2}{a}$; 3) $\frac{2}{4x^2-2x+1}$; 4) $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$.

24. 1) $-y$; 2) $y(x-y)$; 3) $\frac{x^{11}}{y^{11}}$; 4) $\frac{x}{y^3}$.

25. 1) $2c$; 2) $\sqrt{c}+\sqrt{d}$.

26. 1) 3; 2) –4; 3) 0,5; 4) $\frac{2}{3}$; 5) –3; 6) 4.

27. 1) –0,5; 3,5; 2) $-7\frac{1}{3}$; $-5\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $2\frac{2}{3}$.

28. 1) Да; 2) нет; 3) нет; 4) да; 5) нет; 6) да; 7) нет; 8) нет; 9) нет; 10) нет; 11) нет; 12) нет.

29. 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) нет; 6) да; 7) нет; 8) нет; 9) нет; 10) нет; 11) нет; 12) нет.

30. 1) –1,3; 2) 2,7; 3) –1; 4) 3.

31. 1) $2\sqrt{3} \pm 1$; 2) $-\sqrt{5} \pm 5$.

32. 1) 1; 2,4; 2) –1; 5.

33. 1) $x_2 = 10{,}5$; $p = 44$; 2) $x_2 = -\frac{7}{15}$; $p = 15$.

34. 1) –6; $-\frac{5}{11}$; 2) –0,2; 2.

35. 1) 3,2; 2) –2,25; 4.

36. 1) –6; 7; 2) –5,5; –1.

37. 1) ±3; ±2; 2) ±4; ±3; 3) ±0,5; 4) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; ±1.

38. 1) 3; 2) –18; 3) $3\frac{1}{6}$; 4) –2,75.

39. 1) $x \neq -7$; $x \neq 9$; 2) $-1\frac{2}{3}$; 3) 0,875; 4) $-2\frac{2}{3}$; 5) нет корней; 6) 13.

40. 1) 3,14; 7; 2) $-3\frac{9}{13}$; 11.

41. 1) 2; 2) 3; 5; 3) 0; 4) 0; 5.

42. 1) 1; 9; 2) 1; 4; 3) 1; 16; 4) 36; 121; 5) 9; 6) 64; 7) 1; 9; 8) $\frac{1}{16}$; 4.

43. 1) 2; 2) 8; 3) 3; 4) 2; 5) 7; 6) –8; 7) 3; 8) 0.

44. 1) –2; 3; 2) –8; –6; 0; 2; 3) нет корней; 4) нет корней; 5) –1; $\frac{6}{11}$; 1; $1\frac{3}{5}$; 6) –5; 1,5; 2; 4.

45. 1) ±2; ±3; 2) ±9; 3) нет корней; 4) $\pm\frac{2}{3}$.

46. 1) –1; –0,4; –0,2; 0,4; 2) $-1\frac{2}{3}$; 2; 3) –4; –2; 4) $-\frac{7}{3}$; –2; 0; 5) –1; 3; 6) –3; 1; 7) нет корней; 8) нет корней.

47. 1) [1; 4]; 2) $(-\infty; -2] \cup [-1; +\infty)$.

48. 1) (2; 1); 2) (–5; 8).

49. 1) (6; 9); 2) (6; 7).

50. 1) (–5,2; 0,4), (5,2; –0,4); 2) $\left(-\frac{13}{33}; \frac{2}{33}\right)$, $\left(\frac{13}{33}; -\frac{2}{33}\right)$.

51. 1) (–2; 1), (2; –1); 2) (–5; 1), (33; 20); 3) (–2; –5), (1; 4); 4) $\left(-\frac{1}{3}; -1\frac{2}{3}\right)$, (2; 0).

52. 1) (–2,5; –0,5), (0; –3); (0; 2), (2,5; –0,5); 2) (–3; 2), $\left(-\frac{\sqrt{55}}{3}; \frac{\sqrt{55}}{3}\right)$, (2; –3); $\left(\frac{\sqrt{55}}{3}; -\frac{\sqrt{55}}{3}\right)$.

53. 1) $a < -3$, $a > 1$; 2) $2{,}5 < a < 3$.

54. 1) $\pm\sqrt{1{,}8}$; 2) –0,125; 0; 1.

55. 1) $a \geqslant 0$; 2) $a \leqslant 0$.

56. 1) $(9; +\infty)$; 2) $(8; +\infty)$; 3) $[-4; +\infty)$; 4) $(-\infty; 8]$.

57. 1) (3; 7); 2) $\left[2; 2\frac{2}{3}\right]$; 3) $(-\infty; 0{,}2] \cup [1; +\infty)$; 4) $x \neq 4$; 5) нет решений; 6) $\left(-6 - \sqrt{15}; -6 + \sqrt{15}\right)$.

58. 1) (–8; 1,5); 2) (–6; 7,5); 3) $(-\infty; 4]$; 4) [–2; 7]; 5) $[-2; -1) \cup \{0\} \cup [2; 3) \cup (3; +\infty)$; 6) $(-2; -1) \cup [3; +\infty)$.

59. 1) $(-14;\ 12)$; 2) $\left(-\infty;\ \frac{1}{4}\right) \cup \left[1\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; 3) $[0;\ 6]$; 4) $(-5;\ -4) \cup (-4;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ -\sqrt{3}\,] \cup (-1;\ 1) \cup [\sqrt{3};\ +\infty)$; 6) $(-8;\ 0)$.

60. 1) $[-8;\ 5]$; 2) $[-10;\ 2] \cup [4;\ +\infty)$; 3) $[-5;\ -2) \cup [3;\ +\infty)$; 4) $[-1;\ 0] \cup [1;\ +\infty)$; 5) $[-3;\ -1] \cup (0;\ +\infty)$; 6) $(-\infty;\ 0] \cup (3;\ +\infty)$; 7) $(1;\ 5) \cup (5;\ +\infty)$; 8) $(-5;\ +\infty)$; 9) $(-1;\ 2)$; 10) $[-3;\ 1]$.

61. 1) $[-5;\ -4) \cup (2{,}5;\ 3{,}5]$; 2) $x \neq \frac{3}{5}$; $x \neq \pm 1\frac{1}{3}$; 3) $\left(-2\sqrt{2};\ -\frac{2}{3}\right) \cup \left(2\sqrt{2};\ +\infty\right)$; 4) $(-50;\ 1{,}5) \cup (5;\ +\infty)$.

62. 1) $(-5;\ -2) \cup (2;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$; 2) $(-7;\ 6) \cup (6;\ 8)$; 3) $(-3{,}6;\ 1{,}5) \cup [3;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -9] \cup (-3;\ 1{,}5) \cup (1{,}5;\ +\infty)$.

63. 1) $(-\infty;\ -12) \cup (-4;\ +\infty)$; 2) $(-2;\ 8)$; 3) $[-2;\ 6]$; 4) $\left(-\infty;\ -3\frac{1}{3}\right] \cup \left[-2\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; 5) $\boldsymbol{R}$; 6) нет решений.

64. 1) $(-0{,}5;\ 3{,}5)$; 2) $\left(-\infty;\ -2\frac{1}{3}\right) \cup (1;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -1] \cup [0{,}6;\ +\infty)$; 4) $\left[-1;\ 1\frac{4}{7}\right]$.

65. 1) $(11;\ +\infty)$; 2) $[-4;\ 45)$; 3) $(-\infty;\ -5{,}5)$; 4) $\left(-3\frac{5}{6};\ \frac{1}{3}\right]$; 5) $[3;\ +\infty)$; 6) нет решений.

66. 1) $\{-15\} \cup [5;\ +\infty)$; 2) $[-2;\ 2{,}8]$; 3) $(-\infty;\ -4) \cup (2;\ 6)$; 4) $(-\infty;\ -2)$; 5) $(1{,}6;\ +\infty)$; 6) $\left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

67. 1) $(-2;\ -1] \cup [1;\ 4)$; 2) $[-2;\ -1]$; 3) $(0;\ 5]$.

68. 1) Если $a \geqslant 2$, то решений нет; если $a < 2$, то $x \in (a;\ 2)$; 2) если $a \leqslant -3$, то $x \in (-3;\ 3)$; если $|a| < 3$, то $x \in [a;\ 3)$; если $a \geqslant 3$, то решений нет; 3) если $a \leqslant -5$, то $x \in (-\infty;\ a)$; если $-5 < a \leqslant 5$, то $x \in (-\infty;\ -5]$; если $a > 5$, то $x \in (-\infty;\ -5] \cup [5;\ a)$.

69. 1) $\left(0;\ \frac{1}{3}\right]$; 2) $(-\infty;\ -7] \cup (0{,}5;\ +\infty)$; 3) $[4;\ 5]$; 4) $[-7;\ -6) \cup (0;\ 1]$.

70. 1) $(2;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -1] \cup (1;\ 4)$; 3) $[-3;\ 0) \cup (2;\ 3]$; 4) $(-\infty;\ -2) \cup [7;\ +\infty)$; 5) $[-7;\ 3)$; 6) $[3;\ 4) \cup (4;\ 5] \cup \{7\}$.

73. 1) $y = -2x + 1$; 2) $5x - y + 8 = 0$.

74. 1) $(1{,}8;\ 0{,}6)$; 2) $(-1{,}5;\ -3{,}5)$.

75. 1) $(-3;\ -4)$, $(3;\ 4)$; 2) $(-2{,}4;\ -3{,}2)$, $(2{,}4;\ 3{,}2)$.

76. 1) 8; 2; 2) 28; 19.

77. 1) $y = -3x - 5$; 2) $y = 5x + 10$.

78. 1) Увеличится на 6; 2) уменьшится на 27.

79. 1) $y = 12{,}5x + 42{,}5$; 2) $y = 2x + 5$.

80. 1) 5; 2) 3.

81. 1) 1; 2) 0,5.

82. 1) -11; 2) -13.

83. 1) $a = 2$, $b = -8$, $c = 9$; 2) $a = -3$, $b = 12$, $c = 5$.

84. 1) $(-2;\ 8)$, $(1;\ 5)$; 2) $(0;\ 6)$.

94. 1) Окружность с центром $(0;\ 2)$ и радиусом 2; 2) окружность с центром $(1;\ -2)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

95. 1) Точка $(3;\ -5)$; 2) прямые $x = 3$ и $y = -5$.

96. 1) $(-1;\ -1)$, $(1;\ 1)$; 2) $(\approx -2{,}6;\ \approx -0{,}4)$; $(\approx -0{,}2;\ \approx -6{,}7)$; $(\approx 2{,}6;\ \approx 0{,}4)$; 3) $(\approx -1{,}6;\ \approx 2{,}5)$; $(\approx 7{,}6;\ \approx -0{,}5)$; 4) нет решений; 5) $(\approx -1{,}5;\ \approx -3{,}3)$; $(\approx 1{,}5;\ \approx 3{,}3)$; 6) $(\approx -4{,}4;\ \approx -17{,}2)$; $(\approx 1{,}4;\ \approx 0{,}2)$.

98. 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{7}{4}$.

99. 1) $\frac{5}{16}$; 2) $\frac{9}{8}$.

100. 1) Наименьшее число учеников в 9 А, наибольшее — в 9 Б; 2) наименьший объем у синей коробки, наибольший — у красной.

101. 1) В пачке 16 книг, тираж 24 000; 2) изготовлено 1320 пирожных, в одном наборе 22 пирожных.

102. 1) 46; 2) 20 м, 24 м.

103. 1) 6 и 12; 2) 6 °C и 9 °C.

104. 1) $\frac{2}{3}$ ч, $1\frac{1}{2}$ ч; 2) 0,25 и 4.

105. 1) 7; 8; 9; 10; 2) 14 кг.

106. 1) 72 и 94; 2) 25.

107. 1) 53; 2) 27.

108. 1) 33,1 %; 2) 27,1 %.

109. 1) $11\frac{1}{9}$ %; 2) $16\frac{2}{3}$ %.

110. 1) 40 %; 2) 70 %.

111. 1) 25 %; 2) 20 %.

112. 1) 20; 2) 110.

113. 1) 40 %; 2) 150 %.

114. 1) 20 %; 2) $27\frac{11}{107}$ %.

115. 1) 65 %; 2) уменьшилась на 1,72 %.

116. 1) 15 мин; 2) Федор через 1,8 ч, Тимофей через 0,8 ч.

117. 1) Коля за 12 ч, Вадим за 36 ч; 2) Лиза за 14 ч, Лена за 35 ч.

118. 1) Павел за 28 дней, Геннадий за 21 день; 2) Галина за 45 ч, Елена за 36 ч.

119. 1) 15 мин; 2) 10 мин.

120. 1) Из Стулова 38 $\frac{км}{ч}$, из Бурыгино 42 $\frac{км}{ч}$; 2) скорость автомобиля 50 $\frac{км}{ч}$, мотоцикла — 45 $\frac{км}{ч}$.

121. 1) 16 $\frac{км}{ч}$, 28 $\frac{км}{ч}$, 4 $\frac{км}{ч}$; 2) собственная скорость катера, плывущего по течению, 25 $\frac{км}{ч}$, против течения — 30 $\frac{км}{ч}$, скорость течения 3 $\frac{км}{ч}$.

122. 1) 56 $\frac{км}{ч}$, 80 $\frac{км}{ч}$, 720 км; 2) 5 $\frac{км}{ч}$, 6 $\frac{км}{ч}$, 9 км.

123. 1) 72 $\frac{км}{ч}$, 75 $\frac{км}{ч}$ или 50 $\frac{км}{ч}$, $51\frac{3}{7}$ $\frac{км}{ч}$; 2) 12 $\frac{км}{ч}$, 15 $\frac{км}{ч}$.

124. 1) 75 $\frac{км}{ч}$, 100 $\frac{км}{ч}$; 2) 1,5 ч.

125. 1) 60 $\frac{км}{ч}$, 80 $\frac{км}{ч}$; 2) 60 $\frac{км}{ч}$, 84 $\frac{км}{ч}$.

126. 1) 90 $\frac{км}{ч}$; 2) 12 $\frac{км}{ч}$.

127. 1) 120 км; 2) 380 км.

128. 1) 50 км; 2) 2 $\frac{км}{ч}$.

129. 1) 20 км; 2) 100 км.

130. 1) 5 $\frac{км}{ч}$, 7,5 $\frac{км}{ч}$; 2) 12 $\frac{км}{ч}$, 18 $\frac{км}{ч}$.

131. 1) 24 $\frac{км}{ч}$, 75 $\frac{км}{ч}$; 2) 6 $\frac{км}{ч}$, 18 $\frac{км}{ч}$.

132. 44.
133. 21.
134. 2430.
135. 640,5.
136. 7,4.
137. Нет.
138. 33.
139. $a \neq 0$, $a \neq 1$.
140. $a_1 = -6$, $d = 4$ или $a_1 = 18$, $d = -4$.
141. 37,5 или 52,5.
142. 6.
143. $-\frac{35}{3}$; $-\frac{140}{3}$; $-\frac{560}{3}$; $-\frac{2240}{3}$ или 7; –28; 112; –448.
144. 128.
145. 0,24.
146. $4\sqrt{2}$.
147. $b_1 = 8$, $q = 2$.
148. 5.
149. ±2.
150. 0,5.
151. 2; 10; 50 или 50; 10; 2.
152. $a_n = 6n - 3$.
153. –1.
154. 2; 4; 6.
155. 1,75.
156. 5 : 2.
157. 1) На девятые; 2) на двадцать девятый.
158. 1094,4.
159. 7.
160. 7.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Приложение

(Название и номер учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащемуся за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Кузнецова Елена Павловна
Муравьева Галина Леонидовна
Шнеперман Лев Борисович
Ящин Борис Юрьевич

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 9 класса
учреждений общего среднего образования
с русским языком обучения

4-е издание, исправленное и дополненное

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редактор *Н. М. Алганова*. Оформление *Е. Э. Агунович*. Художественный редактор *А. А. Волотович*. Технический редактор *Г. А. Дудко*. Компьютерная верстка *Л. И. Шевко, Г. А. Дудко*. Корректоры *В. С. Бабеня, О. С. Козицкая, Е. И. Даниленко, Е. П. Тхир, А. В. Алешко*.

Подписано в печать 26.02.2014. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 18 + 0,25 форз. Уч.-изд. л. 12,53 + 0,17 форз. Тираж 93 000 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие
«Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/2 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220004, Минск.

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
ЛП № 02330/0150496 от 11.03.2009.
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск.